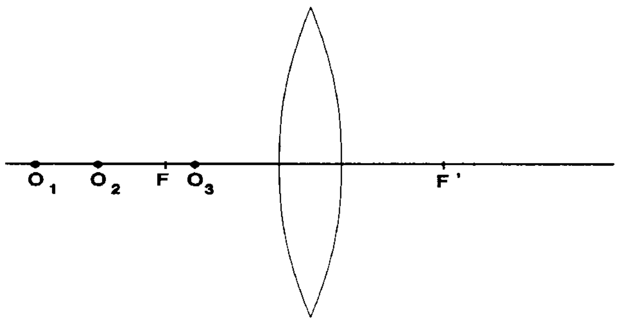
1 Óptica geométrica aplicada al ojo

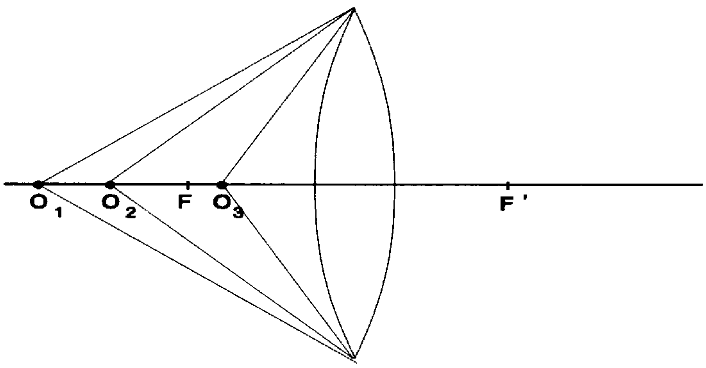
1.1 Delante de una lente convergente situamos tres objetos tal como indica la figura.

a) ¿Qué objeto tendrá una vergencia mayor?

b) De las imágenes de los objetos O_1', O_2', O_3' ¿A cuál le corresponderá una vergencia mayor?



a)



En el espacio objeto, las vergencias son negativas y serán más grandes (en valor absoluto) cuanto más grande sea la divergencia de los rayos que parten de los objetos.

Como puede verse en el dibujo, la divergencia de los rayos que llegan a los mismos puntos de la lente es mayor para el objeto O_3, después para O_2 y menor para el O_1.

Por lo tanto, podemos establecer que:

$$| X_3 | > | X_2 | > | X_1 |$$

donde X_3, X_2 y X_1 representan las vergencias de O_3, O_2 i O_1.

b) Como la lente es convergente, los rayos que llegan con una cierta divergencia a la salida del sistema serán convergentes si la potencia de la lente es mayor que la divergencia con la que llegan al sistema, o bien saldrán del sistema con una divergencia menor que la de entrada en caso contrario.

Por tanto, la vergencia mayor que equivale a una mayor convergencia corresponderá a la imagen del objeto cuya vergencia era menor (en valor absoluto), que equivale a una menor divergencia.

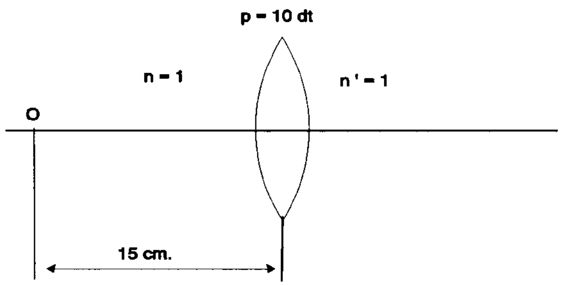
Así pues, para las vergencias imagen se verificará:

$$X_1' > X_2' > X_3'$$

Observar que X'_3 será negativa puesto que el objeto se encuentra por delante de la focal del sistema y su vergencia (negativa) es mayor en valor absoluto que la potencia de la lente.

1.2 Un objeto se encuentra situado a 15 cm de una lente de potencia *P* = 10 D fabricada con vidrio de índice *n* =1,5
a) Calcular la vergencia de dicho objeto y de su imagen.
b) Hacer lo mismo pero suponiendo que el objeto y la lente se hallan sumergidos en agua (*n*=1,3)

a)



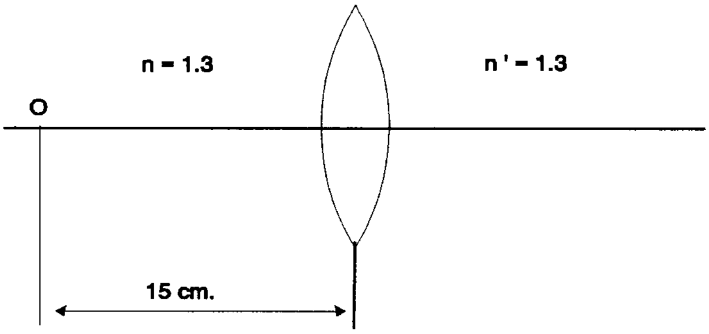
La vergencia objeto será

$$\boldsymbol{X} = \frac{n}{x} = \frac{1}{-15 \cdot 10^{-2}} = -\mathbf{6{,}67}\ \boldsymbol{D}$$

Para calcular la vergencia imagen aplicamos la relación de conjugación:

$$\boldsymbol{X'} = X \quad P = -6{,}67 \quad 10 = \mathbf{3{,}33}\ \boldsymbol{D}$$

b)



Al sumergirla en agua, la potencia de la lente cambiará.

$$\frac{P_{aigua}}{P_{aire}} = \frac{n_L - n_{aigua}}{n_L - n_{aire}} = \frac{1{,}5 - 1{,}3}{1{,}5 - 1} = 0{,}4$$

$$P_{aigua} = 0{,}4 \cdot P_{aire} = 4\ D$$

Vergencia objeto:

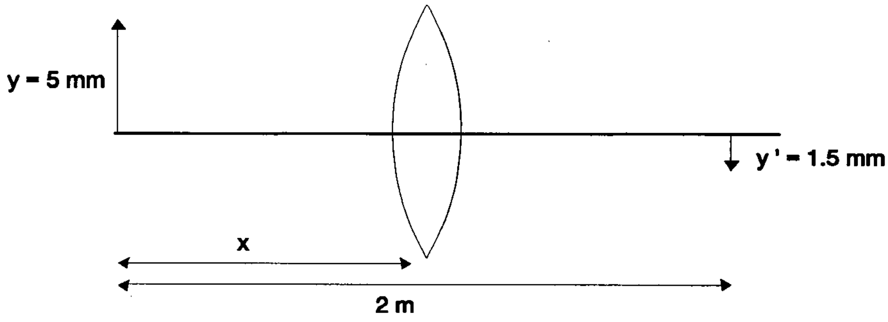
$$\boldsymbol{X} = \frac{n}{x} = \frac{1{,}3}{-15 \cdot 10^{-2}} = -\mathbf{8{,}67}\ \boldsymbol{D}$$

Vergencia imagen:

$$\boldsymbol{X'} = X \quad P = -8{,}67 \quad 4 = -\mathbf{4{,}67}\ \boldsymbol{D}$$

Por lo tanto, cuando sumergimos el sistema en agua la imagen que se obtiene es una imagen virtual.

1.3 Con la ayuda de una lente convergente queremos formar la imagen de un test para la determinación de la agudeza visual, que mide 5 mm, en una pantalla situada a 2 m del test. Si el tamaño de la imagen ha de ser de 1,5 mm, determinar la potencia de la lente y a qué distancia del test deberemos colocarla.



La relación de conjugación

$$X' = X \quad P \qquad (1)$$

y como x'=2 +x podemos expresar

$$X' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{2 \quad x} = \frac{1}{2 \quad \frac{1}{X}} = \frac{X}{1 \quad 2X}$$

$$\uparrow$$

$$X = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto, (1) queda

$$\frac{X}{1 \quad 2X} = X \quad P$$

$$X = (X \quad P)\cdot(1 \quad 2X) = X \quad P \quad 2X^2 \quad 2XP$$

$$2X^2 \quad 2XP \quad P = 0 \qquad (2)$$

De la expresión del aumento lateral

$$\frac{y'}{y} = \frac{X}{X \quad P}$$

como y'= -1,5 mm y y = 5 mm podemos deducir una relación entre X y P. En efecto:

$$\frac{-1{,}5}{5} = \frac{X}{X \quad P} \qquad\qquad P = -4{,}33\ X \qquad (3)$$

y sustituyendo en (2)

$$2X^2 - 8{,}66X^2 - 4{,}33X = 0$$

Despreciamos la solución X = 0 (situar el objeto en el infinito) y obtenemos:

$$-6{,}66X = 4{,}33$$

$$\boldsymbol{X = -0{,}65\ D}$$

y de (3)

$$\boldsymbol{P = 2{,}81\ D}$$

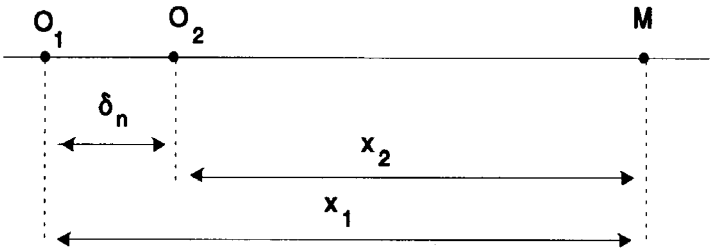
1.4 Deducir las formulas de efectividad

$$X_1 = \frac{X_2}{1 \quad \delta X_2}$$

$$X_2 = \frac{X_1}{1 - \delta X_1}$$

que relacionan las vergencias de un punto *M* respecto a dos orígenes de coordenadas distintos O_1 y O_2.

δ **representa la distancia reducida** $\delta = \overline{O_1 O_2}$ / ***n*****.**



Las abscisas del punto *M* respecto a los dos orígenes de coordenadas son:

$$x_1 = \overline{O_1M} \qquad\qquad x_2 = \overline{O_2M}$$

con lo que se verifica

$$\overline{O_1M} = \overline{O_2M} \quad \delta\cdot n \qquad\qquad x_1 = x_2 \quad \delta\cdot n \tag{1}$$

Introduciendo las vergencias

$$X_1 = \frac{n}{x_1} \qquad \text{y} \qquad X_2 = \frac{n}{x_2}$$

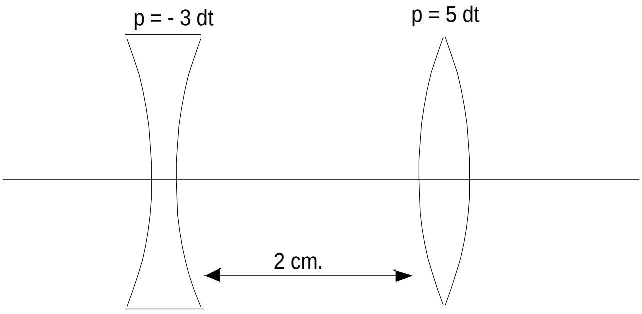
(1) se puede escribir:

$$\frac{n}{X_1} = \frac{n}{X_2} \quad n\cdot\delta \qquad\qquad \frac{1}{X_1} = \frac{1}{X_2} \quad \delta$$

Despejando X_1 y X_2 obtendremos:

$$X_1 = \frac{X_2}{1 \quad \delta\cdot X_2} \qquad\qquad X_2 = \frac{X_1}{1 - \delta\cdot X_1}$$

1.5 Calcular la potencia y la posición de los puntos principales del sistema formado por dos lentes de potencia P_1 = -3D y P_2 = 5D separadas una distancia de 2 cm.



La potencia total vendrá dada por

$$P = P_1 \quad P_2 - \delta \cdot P_1 \cdot P_2$$

donde

$$\delta = \frac{\overline{H_1^{\prime}H_2}}{n} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{1} = 2\cdot 10^{-2}\ m$$

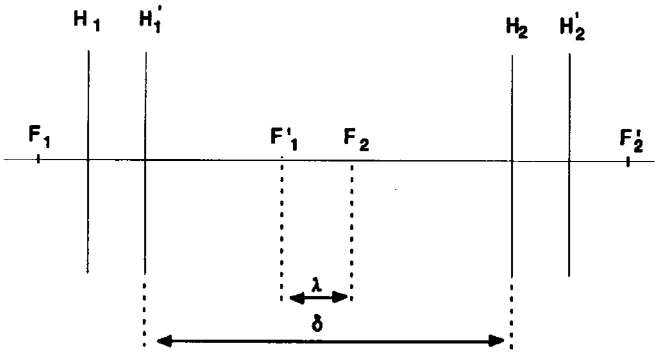
$$\boldsymbol{P} = -3 \quad 5 - 2\cdot 10^{-2}\cdot(-3)\cdot 5 = \mathbf{2{,}3}\ \boldsymbol{D}$$

Las posiciones de los planos principales vendrán dadas por:

$$\overline{\boldsymbol{H_1 H}} = n\cdot \delta \cdot \frac{P_2}{P} = 1\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot \frac{5}{2{,}3} = \mathbf{4{,}3\cdot 10^{-2}}\ \boldsymbol{m}$$

$$\overline{\boldsymbol{H_2^{\prime} H^{\prime}}} = -n\cdot \delta \cdot \frac{P_1}{P} = -1\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot \frac{-3}{2{,}3} = \mathbf{2{,}6\cdot 10^{-2}}\ \boldsymbol{m}$$

1.6 Obtener la fórmula de la potencia de la combinación de dos sistemas tomando como distancia de acoplamiento la distancia entre focos.



Cuando tomamos como distancia de acoplamiento la distancia entre planos principales, la potencia viene dada por:

$$P = P_1 \quad P_2 - \delta \cdot P_1 \cdot P_2 \qquad (1)$$

donde

$$\delta = \frac{\overline{H_1' H_2}}{n}$$

Definimos la distancia reducida entre focos

$$= \frac{\overline{F_1' F_2}}{n}$$

A continuación buscamos una relación entre y δ:

$$\overline{H_1' H_2} = \overline{H_1 F_1'} \quad \overline{F_1' F_2} \quad \overline{F_2 H_2}$$

Dividiendo por *n* (índice intermedio):

$$\delta = \frac{f_1'}{n} \quad - \frac{f_2}{n}$$

Introduciendo las potencias:

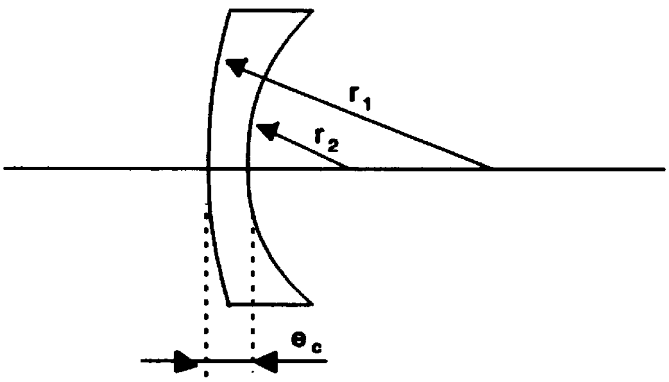
$$\delta = \frac{1}{P_1} \quad \frac{1}{P_2}$$

sustituyendo en (1)

$$\boldsymbol{P} = P_1 \quad P_2 - (\frac{1}{P_1} \quad \frac{1}{P_2}) \cdot P_1 \cdot P_2 = - \quad \cdot \boldsymbol{P_1} \cdot \boldsymbol{P_2}$$

1.7 Suponer una lente menisco fabricada con vidrio de índice n = 1,5 cuyos radios de curvatura son r_1 = 50 cm y r_2 = 5 cm y el espesor en el centro e_c = 15 mm. Calcular:

a) La potencia de la lente.
b) La potencia de vértice anterior.
c) La potencia de vértice posterior.
d) La potencia imagen respecto al vértice anterior.
e) La potencia objeto respecto al vértice posterior.



a) La lente es un sistema compuesto formado por dos superficies esféricas, por lo tanto la potencia:

$$P = P_1 \quad P_2 - \delta \cdot P_1 \cdot P_2$$

$$P_1 = \frac{n_L - n}{r_1} = \frac{1{,}5 - 1}{50 \cdot 10^{-2}} = 1 \ D$$

$$P_2 = \frac{n - n_L}{r_2} = \frac{1 - 1{,}5}{5 \cdot 10^{-2}} = -10 \ D$$

$$\delta = \frac{e_c}{n_L} = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{1{,}5} = 10 \cdot 10^{-3} \ m$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{P} = 1 - 10 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot (-10) = \mathbf{-8{,}9} \ \boldsymbol{D}$$

b) La relación entre la potencia de vértice anterior y la potencia de la lente viene dada por la expresión:

$$P_{va} = \frac{P}{1 - \delta \cdot P_2}$$

sustituyendo valores

$$\boldsymbol{P_{va}} = \frac{-8{,}9}{1 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot (-10)} = \mathbf{-8{,}09} \ \boldsymbol{D}$$

c) La relación entre la potencia de vértice posterior y la potencia de la lente viene dada por la expresión:

$$P_{vp} = \frac{P}{1 - \delta \cdot P_1}$$

sustituyendo valores

$$\boldsymbol{P_{vp}} = \frac{-8{,}9}{1 - 10\cdot 10^{-3}\cdot 1} = -\mathbf{8{,}99}\ \boldsymbol{D}$$

d) La potencia imagen respecto el vértice anterior P_{iva}se define:

$$P_{iva} = \frac{1}{\overline{S_1^{/} F^{/}}}$$

y

$$\overline{S_1 F^{/}} = \overline{S_1^{/} S_2^{/}} \quad \overline{S_2^{/} F^{/}}$$

$$\frac{1}{P_{iva}} = \frac{e}{n} \quad \frac{1}{P_{vp}} = \frac{15\cdot 10^{-3}}{1{,}5} \quad \frac{1}{-8{,}99} = -101{,}23\cdot 10^{-3}\ m$$

$$\boldsymbol{P_{iva}} = -\mathbf{9{,}88}\ \boldsymbol{D}$$

e) La potencia objeto respecto al vértice posterior P_{ovp} se define como:

$$P_{ovp} = -\frac{1}{\overline{S_2 F}}$$

y

$$\overline{S_2 F} = \overline{S_2 S_1} \quad \overline{S_1 F}$$

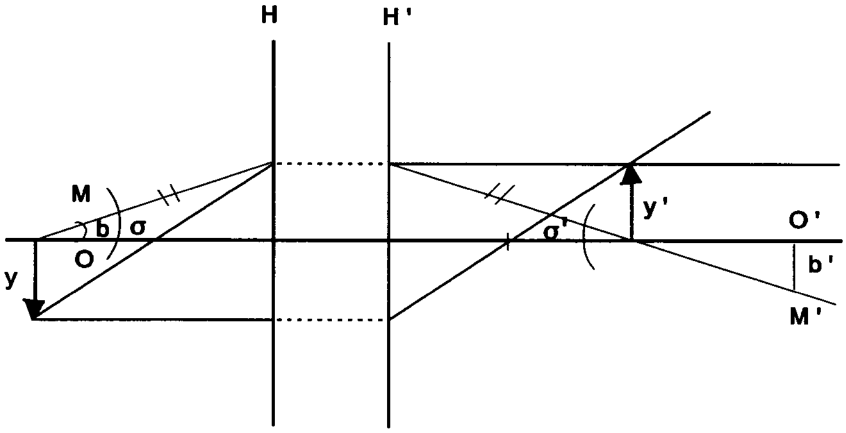
$$-\frac{1}{P_{ovp}} = -\frac{e}{n} - \frac{1}{P_{va}} = -\frac{15\cdot 10^{-3}}{1{,}5} - \frac{1}{-8{,}09} = 113{,}61\cdot 10^{-3}\ m$$

$$\boldsymbol{P_{ovp}} = -\mathbf{8{,}80}\ \boldsymbol{D}$$

1.8 Demostrar la expresión

$$\frac{y'}{y} = \frac{n\,x'}{g\,n'\,x}$$

para el aumento lateral, en la que las distancias objeto e imagen vengan referidas respecto a una pareja de puntos conjugados cualesquiera (siendo *g* el aumento lateral para los planos correspondientes a dichos puntos).



$$n \cdot y \cdot \quad = n' \cdot y' \cdot \quad ' \qquad\qquad \frac{y'}{y} = \frac{n \cdot}{n' \cdot \quad '}$$

$$= \frac{b}{x} \qquad\qquad ' = \frac{b'}{x'}$$

$$\frac{}{\ '} = \frac{b \cdot x'}{b' \cdot x} = \frac{x'}{g \cdot x}$$

$$g = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{n \cdot x'}{g \cdot n' \cdot x}$$

1.9 Probar que el factor de forma *g* es el inverso del aumento lateral relativo a la pareja de puntos conjugados S_1 , S_2' de la cara posterior de una lente gruesa. (S_2'= vértice posterior).

Sea un objeto *O*

$$x = \overline{S_2\, O} \qquad\qquad x' = \overline{S_2'\, O'}$$

La ley de Gauss generalizada se expresa

$$\frac{g}{x'} = \frac{1}{g \cdot x} \quad P$$

Si $x = -$

$$x' = \frac{1}{P_f'} = \frac{g}{P}$$

y por definición de factor de forma:

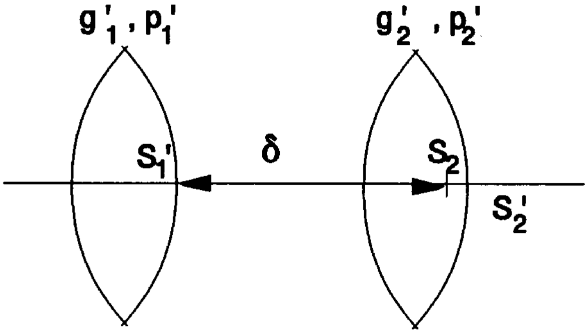
$$P_f' = g' P$$

luego

$$g' = \frac{1}{g}$$

1.10 Obtener la potencia frontal y el factor de forma del aclopamiento de dos lentes gruesas, dados sus valores respectivos.

$$\delta = d \quad \frac{2}{3} e_2$$



A)

$$x_1 = - \qquad x_1' = \frac{1}{P_1'}$$

$$x_1' \qquad x_2 = \frac{1}{P_1'} - \delta = \frac{1 - \delta P_1'}{P_1'}$$

$$\frac{1}{x_2'} = \frac{g_2'^2}{x_2} \quad P_2' = \frac{g_2'^2 \cdot P_1'}{1 - \delta \cdot P_1'} \quad P_2'$$

$$\frac{1}{x_2'} \quad \frac{1}{x'} = P_f'$$

$$\boldsymbol{P_f' = \frac{g_2'^2 \cdot P_1'}{1 - \delta \cdot P_1'} \quad P_2'}$$

B) Sabemos que

$$x_1' = \delta \quad x_2 = \delta \quad \frac{g_2'^2 \cdot x_2'}{1 - P_2' \cdot x_2'} = \delta \quad \frac{g_2'^2 \cdot x'}{1 - P_2' \cdot x'}$$

$$\uparrow$$

$$x_2' \quad x'$$

Por otra parte

$$\frac{y_1'}{y} = \frac{1 - P_1' \cdot x_1'}{g_1'} = \frac{1 - P_1' \cdot \left(\delta \quad \frac{g_2'^2 \cdot x'}{1 - P_2' \cdot x'} \right)}{g_1'}$$

Finalmente

$$\frac{y'}{y} = \frac{y_1'}{y} \cdot \frac{y'}{y_1'} \qquad\qquad \frac{y'}{y_1'} = \frac{1 - P_2' \cdot x'}{g_2'}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \delta \cdot P_1' \cdot (1 - P_f' \cdot x')}{g_1' \cdot g_2'}$$

Deberá ser :

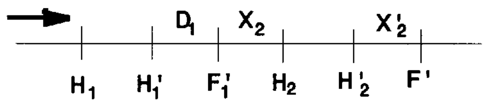
$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - P_f' \cdot x'}{g'}$$

y por comparación

$$\boldsymbol{g' = \frac{g_1' \cdot g_2'}{1 - \delta\, P_1'}}$$

1.11 Deducir las posiciones de los planos principales de un acoplamiento de dos sistemas en términos de sus potencias respectivas y la potencia total del sistema.

a) La imagen de un objeto alejado se formará primero en el foco imagen del primer sistema F'_1 y finalmente en el foco del sistema total F'.



F'_1 medido desde H'_1 será P_1, y aplicando las fórmulas de efectividad, la imagen intermedia objeto para el segundo sistema estará a

$$X_2 = \frac{X_1}{1 - \delta X_1} \qquad \delta = \frac{\overline{H_1' H_2}}{n_1'}$$

Se tiene entonces que la imagen final desde H'_2 estará a:

$$X_2' = X_2 \quad P_2 = \frac{P_1}{1 - \delta P_1} \quad P_2 = \frac{P}{1 - \delta P_1}$$

siendo

$$P = P_1 \quad P_2 - \delta P_1 P_2$$

Para calcular $\overline{H_2' H}$ hacemos

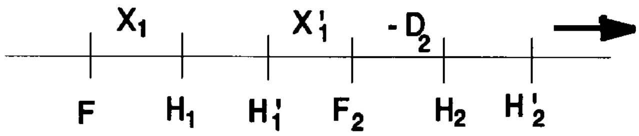
$$\overline{H_2' H'} = \overline{H_2' F'} - \overline{H' F'}$$

$$\overline{H_2' H'} = \frac{n'}{X_2'} - \frac{n'}{P}$$

y sustituyendo resulta:

$$\frac{\overline{H_2^{\prime} H^{\prime}}}{n^{\prime}} = -\frac{\delta\, P_1}{P}$$

b) Si consideramos ahora un objeto cuya imagen se forma en el infinito, la imagen intermedia deberá estar situada en el foco objeto del segundo sistema F_2 y el objeto de partida en el foco objeto del sistema total F.



La distancia de F_2 a H_2 será $-P_2$ y de nuevo, aplicando las fórmulas de efectividad, F_2 estará de H'_1 a

$$X_1^{\prime} = \frac{-P_2}{1 - \delta\, P_2}$$

con lo que el objeto estará a:

$$X_1 = X_1^{\prime} - P_1 = \frac{-P_2}{1 - \delta\, P_2} - P_1 = \frac{-P}{1 - \delta\, P_2}$$

Igual que antes podemos hacer

$$\overline{H_1 H} = \overline{H_1 F} - \overline{H F}$$

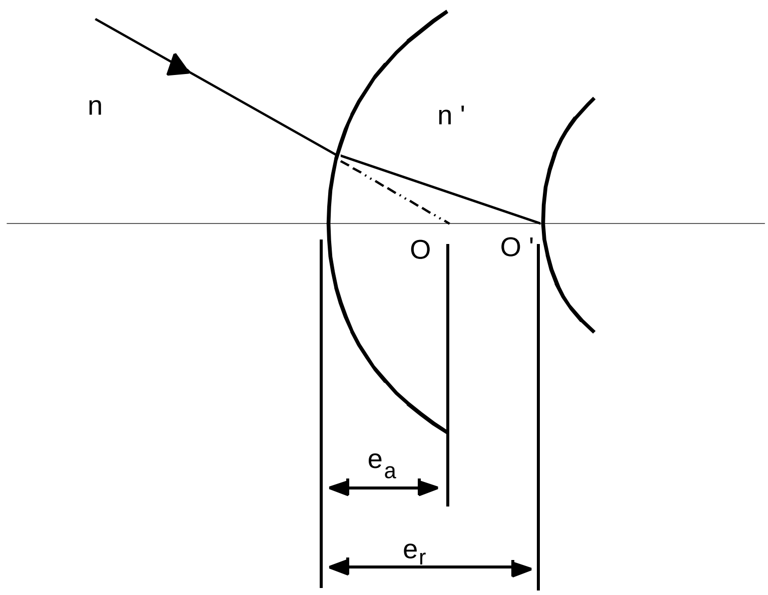
$$\overline{H_1 H} = \frac{n}{X_1} \quad \frac{n}{P}$$

y resulta sustituyendo

$$\frac{\overline{H_1 H}}{n} = \frac{\delta P_2}{P}$$

2 El ojo como sistema óptico

2.1 Suponiendo que el espesor de la córnea es de 0,55 mm, el radio de la primera superficie es de 7,8 mm y el índice es 1,3771, calcular el valor del espesor aparente que obtendremos al realizar la medida.



Cuando con nuestro instrumento de medida veamos enfocada la segunda superficie de la córnea, nosotros estamos enfocando realmente en el punto *O*, y lo que vemos es la imagen de este objeto a través de la primera superficie de la córnea. Por lo tanto, los puntos *O* y *O*' son conjugados y la relación entre sus vergencias viene dada por:

$$X' = X + P$$

donde

$$X^{/} = \frac{n^{/}}{x^{/}} = \frac{n}{e_r} = \frac{1{,}3771}{0{,}55\cdot 10^{-3}} = 2503{,}82\ D$$

$$X = \frac{1}{x} = \frac{1}{e_a}$$

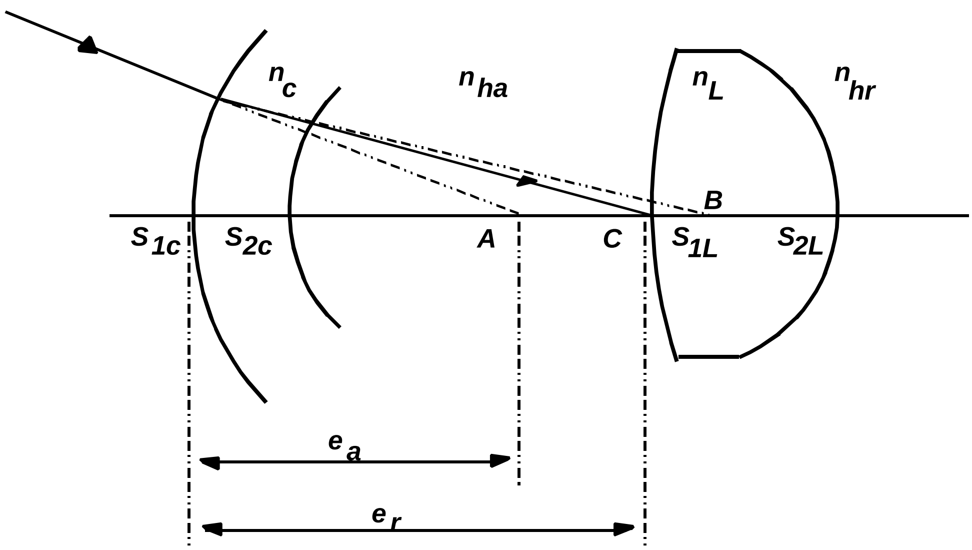
$$P = \frac{n^{/} - n}{r} = \frac{1{,}3771 - 1}{7{,}8\cdot 10^{-3}} = 48{,}35\ D$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{e_a} = 2503{,}82 - 48{,}35 = 2455{,}47\ D$$

$\boldsymbol{e_a = 0{,}407\ mm}$

2.2 Al medir la distancia de la primera superficie de la córnea a la primera superficie del cristalino obtenemos un valor de 3,04 mm. ¿Cuál es la posición real de la primera superficie del cristalino respecto a la primera superficie de la córnea?



Con nuestro instrumento de medida veremos la primera superficie del cristalino (*C*) enfocada en el punto *A*, que es la antiimagen de la primera superficie del cristalinoa través de la córnea.

El punto *B* es la imagen de *A* a través de la primera superficie de la córnea, y el punto *C* es la imagen de *B* a través dela segunda superficie de la córnea.

Por lo tanto, aplicando la relación de conjugación

$$X' = X + P$$

podemos calcular la posición de *B*.

$$X' = \frac{n'_c}{x'} = \frac{1{,}3771}{x'}$$

$$X = \frac{n}{x} = \frac{1}{e_a} = \frac{1}{3{,}04\cdot 10^{-3}} = 328{,}95\ D$$

$$P_{1c} = 48{,}35\ D$$

Por lo tanto:

$$\frac{1{,}3771}{x'} = 328{,}95 + 48{,}35 = 377{,}3\ D$$

$$x' = \overline{S_{1c}B} = 3{,}65\ mm$$

Esta es la distancia desde el vértice de la córnea al punto *B*.

Considerando ahora este punto como objeto, y calculando su imagen a través de la segunda superficie de la córnea, obtendremos el valor del espesor real.

El punto *B* respecto a la segunda superficie de la córnea está situado:

$$\overline{S_{2c}B} = \overline{S_{1c}B} - \overline{S_{1c}S_{2c}} = 3{,}65 - 0{,}55 = 3{,}1\ mm$$

donde $\overline{S_{1c}S_{2c}}$ es el espesor de la córnea.

$$X' = \frac{n'_{ha}}{x'} = \frac{1{,}3374}{x'}$$

$$X = \frac{n_c}{x} = \frac{1{,}3771}{3{,}1 \cdot 10^{-3}} = 444{,}23 \ D$$

$$P_{2c} = -6{,}1 \ D$$

Por lo tanto:

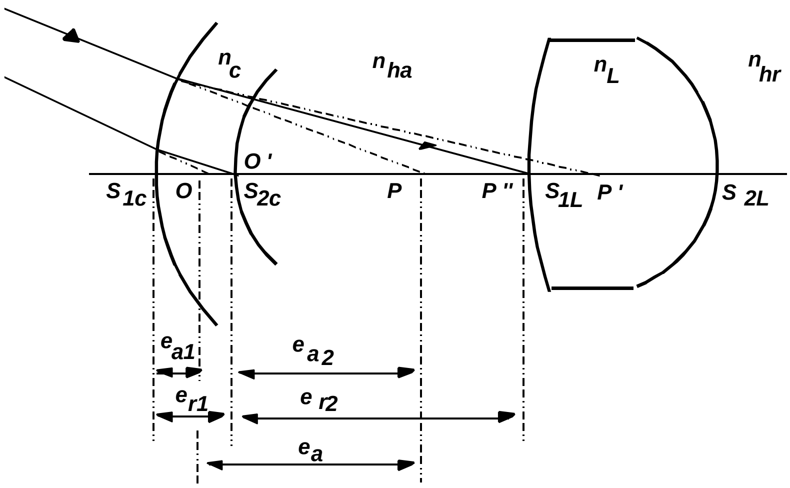
$$\frac{1{,}3374}{x'} = 444{,}23 - 6{,}1 = 438{,}13 \ D$$

$$x' = \overline{S_{2c} C} = 3{,}05 \ mm$$

La distancia desde la primera superficie de la córnea será:

$$\overline{\mathbf{S_{1c} C}} = \overline{S_{1c} S_{1L}} = \overline{S_{1c} S_{2c}} + \overline{S_{2c} S_{1L}} = 0{,}55 + 3{,}05 = \mathbf{3{,}6 \ mm}$$

2.3 Calcular la profundidad aparente que obtenemos al medir la profundidad de la cámara anterior enfocando la superficie posterior de la córnea y la anterior del iris, sabiendo que la profundidad real es de 3 mm.



Cuando en nuestro instrumento vemos enfocada nítidamente la segunda superficie de la córnea, lo hacemos a través de la primera superficie de la córnea; por tanto, mediremos el espesor aparente e_{a1}.

Aplicando la relación de conjugación:

$$X' = X + P$$

donde

$$X' = \frac{n_c}{e_{r1}} = \frac{1{,}3771}{0{,}55 \cdot 10^{-3}} = 2503{,}82 \ D$$

$$P = P_{1c} = 48{,}35 \ D$$

$$\frac{1}{e_a} = 2503{,}82 - 48{,}35 = 2455{,}47 \ D$$

$$e_a = 0{,}41 \ mm$$

La antiimagen del punto P'', que coincide con la primera superficie del cristalino a través de la segunda superficie de la córnea, será el punto P'.

Aplicamos la relación de conjugación

$$X' = X + P$$

donde

$$X' = \frac{n_{ha}}{e_{r_2}} = \frac{1{,}3374}{3 \cdot 10^{-3}} = 445{,}8 \ D$$

$$X = \frac{n_c}{\overline{S_{2c}P'}} = \frac{1{,}3771}{\overline{S_{2c}P'}}$$

$$P = P_{2c} = -6{,}1 \ D$$

$$\frac{1{,}3771}{\overline{S_{2c}P'}} = 445{,}8 + 6{,}1 = 451{,}9 \ D$$

$$\overline{S_{2c}P'} = 3{,}05 \ mm$$

La antiimagen del punto *P*' a través de la primera superficie de la córnea nos dará el punto *P*. La distancia de *P*' a la primera superficie de la córnea es:

$$\overline{S_{1c}P'} = \overline{S_{1c}S_{2c}} + \overline{S_{2c}P'} = 0{,}55 + 3{,}05 = 3{,}6 \ mm$$

Aplicando la relación de conjugación

$$X' = X + P$$

donde

$$X' = \frac{n_c}{\overline{S_{1c}P'}} = \frac{1{,}3771}{2{,}82 \cdot 10^{-3}} = 382{,}5 \ D$$

$$X = \frac{1}{\overline{S_{1c}P}}$$

$$P = P_{1c} = 48{,}35 \ D$$

por lo tanto;

$$\frac{1}{\overline{S_{1c}P}} = 382{,}5 - 48{,}35 = 333{,}95 \ D$$

$$\overline{S_{1c}P} = 2{,}99 \ mm$$

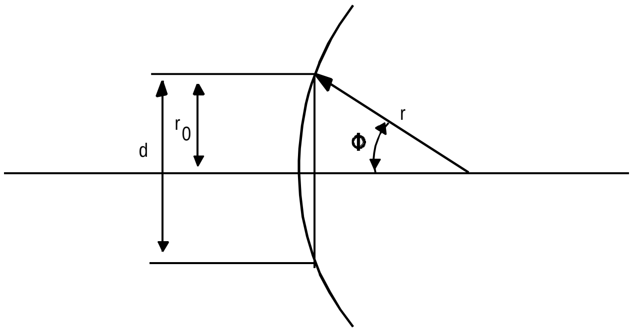
El valor del espesor aparente final, que será el que nosotros encontremos al realizar la medición, será:

$$\overline{OP} = \overline{OS_{1c}} + \overline{S_{1c}P} = -0{,}41 + 2{,}99 = \mathbf{2{,}58 \ mm}$$

2.4 Determinar el diámetro de la zona óptica de la córnea utilizando la fórmula de Berg

$$r = \frac{r_0}{1 - tg^4 \varphi}$$

siendo r_0 el radio del centro de la zona óptica y _ el ángulo entre la perpendicular al punto bajo consideración y la perpendicular al centro de la área considerada. Definimos la zona óptica con la condición de que el radio de curvatura no varíe más de un 1% en toda la zona.



La condición para que r i r_0 varíen menos de un 1% es:

$$\frac{r - r_0}{r_0} < 0{,}01$$

$$\frac{r_0}{r_0(1 - tg^4\varphi)} - \frac{r_0}{r_0} < 0{,}01$$

$$tg^4\varphi < 0{,}0099$$

$$tg\varphi < 0{,}3154$$

Por lo tanto

$$\varphi < 17°30'$$

El diámetre de la zona óptica d vendrá dado por:

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{d}{2}}{r_0}$$

$$d = 2 \cdot r_o \cdot tg\,\varphi$$

Si consideramos que el radio de la primera superficie de la córnea es de 8 mm el diámetro de la zona óptica de la córnea es:

$\boldsymbol{d} = 2 \cdot 7{,}8 \cdot 0{,}3154 = \mathbf{4{,}9} \; \boldsymbol{mm}$

Es decir que la córnea únicamente es esférica en una región de 4,9 mm de diámetro.

2.5 El ojo teórico formulado por Ivanoff tiene las siguientes características :

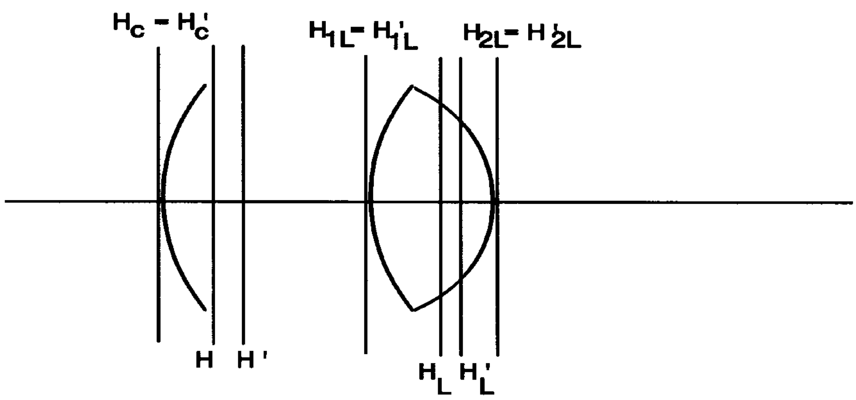
Índices

Humor acuoso	**1,3354**
Cristalino	**1,44**
Humor vítreo	**1,334**

Radios de curvatura

Córnea	**8 mm**
Primera superficie del cristalino	**10,2 mm**
Segunda superficie del cristalino	**6 mm**
Profundidad cámara anterior	**3,6 mm**
Espesor cristalino	**4 mm**

Calcular la potencia, las distancias focales, la posición de los planos principales y la longitud del ojo.



Córnea

$$P_c = \frac{n_{ha} - 1}{r_c} = \frac{1{,}3354 - 1}{8 \cdot 10^{-3}} = 41{,}92 \ D$$

Cristalino

$$P_{1L} = \frac{n_L - n_{ha}}{r_{1L}} = \frac{1{,}44 - 1{,}3354}{10{,}2 \cdot 10^{-3}} = 10{,}25 \ D$$

$$P_{2L} = \frac{n_{hv} - n_L}{r_{2L}} = \frac{1{,}334 - 1{,}44}{-6 \cdot 10^{-3}} = 17{,}67 \ D$$

$$\delta = \frac{e}{n_L} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1{,}44} = 2{,}78 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$P_1 = P_{1L} + P_{2L} - \delta \cdot P_{1L} \cdot P_{2L} = 10{,}25 + 17{,}67 - 2{,}78 \cdot 10^{-3} \cdot 10{,}25 \cdot 17{,}67 = 27{,}42 \ D$$

$$\overline{H_{1L} H_L} = n_{ha} \cdot \delta \cdot \frac{P_{2L}}{P_L} = 1{,}3354 \cdot 2{,}78 \cdot 10^{-3} \frac{17{,}67}{27{,}42} = 2{,}39 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$\overline{H'_{2L} H'_2} = -n_{hv} \cdot \delta \cdot \frac{P_{1L}}{P_1} = 1{,}334 \cdot 2{,}78 \cdot 10^{-3} \frac{10{,}25}{27{,}42} = 1{,}39 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$\overline{S H_L} = \overline{S H_{1L}} + \overline{H_{1L} H_L} = 3{,}6 + 2{,}39 = 5{,}99 \ mm$$

$$\overline{S H'_L} = \overline{S H_{1L}} + \overline{H_{1L} H'_{2L}} + \overline{H'_{2L} H'_L} = 3{,}6 + 4 - 1{,}39 = 6{,}21 \ mm$$

Potencia total del ojo

$$P = P_c + P_L - \delta \cdot P_c \cdot P_L$$

$$\delta = \frac{\overline{H'_c H_L}}{n_{ha}} = \frac{\overline{S H_L}}{n_{ha}} = \frac{5{,}99 \cdot 10^{-3}}{1{,}3354} = 4{,}49 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$\boldsymbol{P} = 41{,}92 + 27{,}42 - 4{,}49 \cdot 10^{-3} \cdot 41{,}92 \cdot 27{,}42 = \mathbf{64{,}18 \ D}$$

Planos principales

$$\overline{H_c H} = \delta \cdot \frac{P_L}{P} = 4{,}49 \cdot 10^{-3} \frac{27{,}42}{64{,}18} = 1{,}91 \cdot 10^{-3} m$$

$$\overline{H_L^{/} H_L} = -n_{hv} \cdot \delta \frac{P_c}{P} = -1{,}334 \cdot 4{,}49 \cdot 10^{-3} \frac{41{,}92}{64{,}18} = -3{,}91 \cdot 10^{-3}\ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SH} = \overline{H_c H} = 1{,}91\ mm$$

$$\overline{SH^{/}} = \overline{SH_L^{/}} + \overline{H_L^{/} H^{/}} = 6{,}21 - 3{,}91 = 2{,}30\ mm$$

Longitudes focales

$$f^{/} = \frac{n^{/}}{P} = \frac{n_{hv}}{P} = \frac{1{,}334}{64{,}18} = 20{,}78 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$f = -\frac{n}{P} = \frac{-1}{64{,}18} = -15{,}58 \cdot 10^{-3}\ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SF^{/}} = \overline{SH^{/}} + \overline{H^{/} F^{/}} = 2{,}30 + 20{,}78 = 23{,}08\ mm$$

$$\overline{SF} = \overline{SH} + \overline{HF} = 1{,}91 - 15{,}58 = -13{,}67\ mm$$

Longitud del ojo

Si suponemos que el ojo es emétrope, la focal imagen coincidirá con la retina y por lo tanto la longitud del ojo será igual a:

$$l = \overline{SF^{/}} = 23{,}08\ mm$$

2.6 Determinar la potencia, posición de los planos principales, longitud, posición y tamaño de las pupilas de entrada y salida del siguiente ojo teórico:

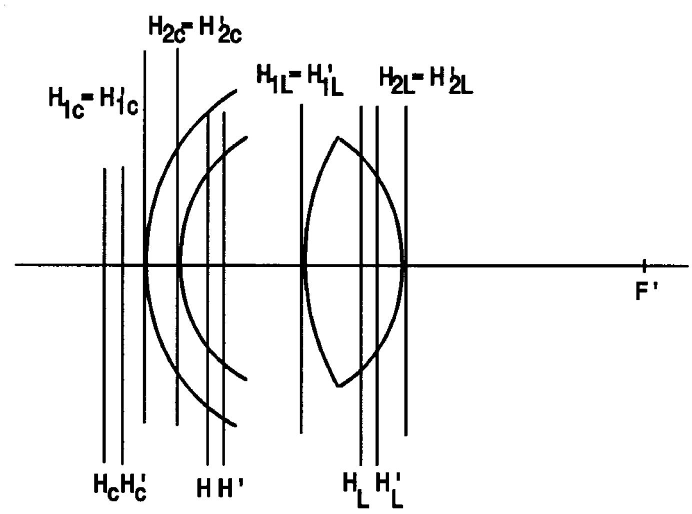
Radios de curvatura

Primera superficie córnea	**7,7 mm**
Segunda superficie córnea	**6,8 mm**
Primera superficie del cristalino	**10 mm**
Segunda superficie del cristalino	**-6 mm**

Índices

Córnea	**1,376**
Humor acuoso	**1,336**
Cristalino	**1,416**
Humor vítreo	**1,336**

Espesor de la córnea	**0,5 mm**
Espesor del cristalino	**4 mm**
Profundidad de la cámara anterior	**2,7 mm**
Tamaño del iris	**4 mm**



Córnea

$$P_{1c} = \frac{n_c - 1}{r_{1c}} = \frac{1{,}376 - 1}{7{,}7 \cdot 10^{-3}} = 48{,}83\ D$$

$$P_c = P_{1c} + P_{2c} - \delta \cdot P_{1c} \cdot P_{2c} = 48{,}83 - 5{,}88 - 0{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot 48{,}83 \cdot (-5{,}88)$$

$$P_{2c} = \frac{n_{ha} - n_L}{r_{2c}} = \frac{1{,}336 - 1{,}376}{6{,}8 \cdot 10^{-3}} = -5{,}88 \ D$$

$$\delta = \frac{e}{n_c} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}376} = 0{,}36 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$P_c = 43{,}05 \ D$$

$$\overline{H_{1c} H_c} = \delta \cdot \frac{P_{2c}}{P_c} = 0{,}36 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{-5{,}88}{43{,}05} = -4{,}92 \cdot 10^{-5} \ m$$

$$\overline{H'_{2c} H'_c} = -n_{ha} \cdot \delta \frac{P_{1c}}{P_c} = -1{,}336 \cdot 0{,}36 \cdot 10^{-3} \frac{48{,}83}{43{,}05} = -5{,}46 \cdot 10^{-4} \ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SH_c} = \overline{H_{1c} H_c} = -4{,}92 \cdot 10^{-2} \ mm$$

$$\overline{SH'_c} = \overline{SH'_{2c}} + \overline{H'_{2c} H'_c} = 0{,}5 - 0{,}546 = -4{,}6 \cdot 10^{-2} \ mm$$

Cristalino

$$P_{1L} = \frac{n_L - n_{ha}}{r_{1L}} = \frac{1{,}416 - 1{,}336}{10 \cdot 10^{-3}} = 8 \ D$$

$$P_{2L} = \frac{n_{hv} - n_L}{r_{2L}} = \frac{1{,}336 - 1{,}416}{-6 \cdot 10^{-3}} = 13{,}33 \ D$$

$$\delta = \frac{e}{n_L} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1{,}416} = 2{,}82 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$P_L = P_{1L} + P_{2L} - \delta \cdot P_{1L} \cdot P_{2L} = 8 + 13{,}33 - 2{,}82 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 13{,}33 = 21{,}03 \ D$$

$$\overline{H_{1L} H_L} = n_{ha} \cdot \delta \cdot \frac{P_{2L}}{P_L} = 1{,}336 \cdot 2{,}82 \cdot 10^{-3} \frac{13{,}33}{21{,}03} = 2{,}39 \cdot 10^{-3} \ m$$

$$\overline{H_{2L}^{/}\,H_L^{/}} = -n_{hv}\cdot\delta\cdot\frac{P_{1L}}{P_L} = -1{,}336\cdot 2{,}82\cdot 10^{-3}\frac{8}{21{,}03} = -1{,}433\cdot 10^{-3}\ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SH_L} = \overline{SH_{1L}} + \overline{H_{1L}\,H_L} = 3{,}2 + 2{,}39 = 5{,}59\ mm$$

$$\overline{SH_L^{/}} = \overline{SH_{1L}^{/}} + \overline{H_{1L}^{/}\,H_{2L}^{/}} + \overline{H_{2L}^{/}\,H_L^{/}} = 3{,}2 + 4 - 1{,}43 = 5{,}77\ mm$$

Potencia del ojo completo

$$P = P_c + P_L - \delta\cdot P_c\cdot P_L$$

$$\delta = \frac{\overline{H_c^{/}H_L}}{n_{ha}} = \frac{\overline{H_c^{/}S} + \overline{SH_L}}{n_{ha}} = \frac{4{,}6\cdot 10^{-2} + 5{,}59}{1{,}336} = 4{,}22\ mm$$

$$P = 43{,}05 + 21{,}03 - 4{,}22\cdot 10^{-3}\cdot 43{,}05\cdot 21{,}08 = 60{,}26\ D$$

Planos principales

$$\overline{H_c H} = \delta\cdot\frac{P_L}{P} = 4{,}22\cdot 10^{-3}\cdot\frac{21{,}03}{60{,}26} = 1{,}47\cdot 10^{-3}\ m$$

$$\overline{H_L^{/}H^{/}} = -n_{hv}\cdot\delta\frac{P_c}{P} = -1{,}336\cdot 4{,}22\cdot 10^{-3}\frac{43{,}05}{60{,}26} = -4{,}03\cdot 10^{-3}\ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SH} = \overline{SH_c} + \overline{H_c H} = -4{,}92\cdot 10^{-2} + 1{,}47 = 1{,}42\ mm$$

$$\overline{SH^{/}} = \overline{SH_L^{/}} + \overline{H_L^{/}H^{/}} = 5{,}77 - 4{,}03 = 1{,}74\ mm$$

Longitud del ojo

Al ser el ojo emétrope la focal coincidirá con la retina.

$$f' = \frac{n_{hv}}{P} = \frac{1{,}336}{60{,}26} = 22{,}17 \ mm$$

por lo tanto:

$$l = \overline{SF'} = \overline{SH'} + \overline{H'F'} = 1{,}74 + 22{,}17 = 23{,}91 \ mm$$

Pupilas

La pupila de entrada es la antiimagen del iris a través de la córnea, Por lo tanto:

$$X'_{iris} = X_{PE} + P_c$$

$$X'_{iris} = \frac{n_{ha}}{\overline{H'_c I}}$$

Y la distancia desde el plano principal imagen de la córnea al iris:

$$\overline{H'_c I} = \overline{H'_c H_{1L}} = \overline{H'_c S} + \overline{SH_{1L}} = 4{,}6 \cdot 10^{-2} + 3{,}2 = 3{,}24 \ mm$$

$$X_{PE} = \frac{1{,}336}{3{,}24 \cdot 10^{-3}} - 43{,}05 = 369{,}20 \ D$$

$$x_{PE} = \overline{H_c P_e} = \frac{1}{X_{PE}} = \frac{1}{369{,}30} = 2{,}70 \cdot 10^{-3} \ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

$$\overline{SP_e} = \overline{SH_c} + \overline{H_c P_e} = -4{,}92 \cdot 10^{-2} + 2{,}70 = 2{,}65 \ mm$$

Calculemos ahora el tamaño de la pupila de entrada:

$$\frac{y'_{iris}}{y_{PE}} = \frac{X_{PE}}{X'_{iris}}$$

$$y_{PE} = \frac{X'_{iris}}{X_{PE}} \cdot y'_{iris} = \frac{412,35}{369,30} \cdot 4 = 4,47 \ \ mm$$

La pupila de salida es la imagen de la pupila del iris a través del cristalino, es decir:

$$X'_{PS} = X_{iris} + P_L$$

$$X_{iris} = \frac{n_{ha}}{\overline{H_L I}}$$

Y la distancia desde el plano principal objeto del cristalino al iris:

$$\overline{H_L I} = \overline{H_L H_{1L}} = -2,39 \cdot 10^{-3} \ \ m$$

$$X_{iris} = \frac{1,336}{-2,39 \cdot 10^{-3}} = -559 \ \ D$$

$$X'_{PS} = -559 + 21,03 = -537,97 \ \ D$$

$$x'_{PS} = \frac{n_{hv}}{X'_{PS}} = \frac{1,336}{-537,97} = -2,48 \cdot 10^{-3} \ \ m$$

Respecto al vértice de la córnea:

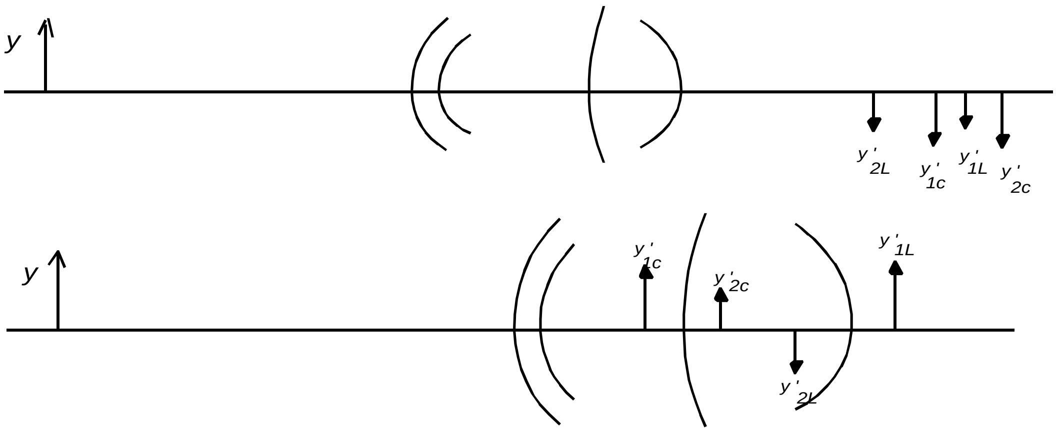
$$\overline{SP_S} = \overline{SH'_L} + \overline{H'_L P_S} = 5,77 - 2,48 = 3,29 \ \ mm$$

Calculemos ahora el tamaño:

$$\frac{y'_{ps}}{y_{iris}} = \frac{X_{iris}}{X'_{ps}}$$

$$y'_{ps} = \frac{X_{iris}}{X_{ps}} \cdot y_{iris} = \frac{-559}{-537,97} \cdot 4 = 4,16 \ \ mm$$

2.7 Calcular las posiciones y los tamaños de las imágenes dióptricas y catóptricas de un objeto de 150 mm situado a 300 mm de la superficie anterior de la córnea.



IMÁGENES DIÓPTRICAS

Aplicaremos la relación de conjugación

$$X' = X + P$$

para calcular la posición de estas imágenes. Debemos tener en cuenta que la imagen a través de una superficie sirve de objeto para la otra.
Para calcular el tamaño utilizaremos la fórmula del aumento:

$$\frac{y'}{y} = \frac{X}{X'}$$

1º Superficie de la córnea

x_{1c} = -300 mm
n_{1c} = 1 (aire)
n'_{1c} = 1,3771 (córnea)
r_{1c} = 7,8 mm

$$X'_{1c} = \frac{1}{-300 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,3771 - 1}{7,8 \cdot 10^{-3}} = 45,01 \ D$$

$$x'_{1c} = \frac{1,3771}{45,01} = 30,59 \ mm$$

$$y'_{1c} = \frac{-3,33}{45,01} \cdot 150 = -11,10 \ mm$$

2º Superficie de la córnea

$x_{2c} = X_{1c}' - e_c = 30,59 - 0,55 = 30,04$ mm
$n_{2c} = 1,3771$ (córnea)
$n'_{2c} = 1,3374$ (h.acuoso)
$r_{2c} = 6,5$ mm

$$X'_{2c} = \frac{1,3771}{30,04 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,3374 - 1,3771}{6,5 \cdot 10^{-3}} = 39,73 \ D$$

$$x'_{2c} = \frac{1,3374}{39,73} = 33,66 \ mm$$

$$y'_{2c} = \frac{45,84}{39,73} \cdot (-11,10) = -12,81 \ mm$$

1º Superficie del cristalino

$x_{1L} = x_{2c}' - p_{ca} = 33,66 - 3 = 30,66$ mm
$n_{1L} = 1,3374$ (h.acuoso)
$n'_{1L} = 1,42$ (cristalino)
$r_{1L} = 10,2$ mm

$$X'_{1L} = \frac{1,3374}{30,66 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,42 - 1,3374}{10,2 \cdot 10^{-3}} = 51,72 \ D$$

$$x'_{1L} = \frac{1,42}{51,72} = 27,46 \ mm$$

$$y'_{1L} = \frac{43,62}{51,72} \cdot (-12,85) = -10,80 \ mm$$

2º Superficie del cristalino

$x_{2L} = x_{1L}' - e_L = 27{,}46 - 4 = 23{,}46$ mm
$n_{2L} = 1{,}42$ (cristalino)
$n'_{2L} = 1{,}336$ (h.vítreo)
$r_{2L} = -6$ mm

$$X_{2L}^{/} = \frac{1{,}42}{23{,}46 \cdot 10^{-3}} + \frac{1{,}336 - 1{,}42}{-6 \cdot 10^{-3}} = 74{,}53 \ D$$

$$x_{2L}^{/} = \frac{1{,}336}{74{,}56} = 17{,}93 \ mm.$$

$$y_{2L}^{/} = \frac{60{,}53}{74{,}53} \cdot (-10{,}80) = -8{,}77 \ mm$$

IMÁGENES CATÓPTRICAS

La relación de conjugación cuando las superficies ópticas del ojo actúan como catóptricos se escribe:

$$\frac{1}{x^{/}} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{r}$$

y para el aumento:

$$\frac{y^{/}}{y} = -\frac{x^{/}}{x}$$

1º Superficie de la córnea

$x_{1c} = -300$ mm.
$r_{1c} = 7{,}8$ mm.

$$\frac{1}{x_{1c}^{/}} = -\frac{1}{-300 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{7{,}8 \cdot 10^{-3}} = 259{,}74 \ D$$

$$x_{1c}^{/} = 3{,}85 \ mm$$

$$y_{1c}^{/} = -\frac{3{,}85}{-300} \cdot 150 = 1{,}925 \ mm$$

2º Superficie de la córnea

x_{2c} = 30,04 mm
r_{2c} = 6,5 mm

$$\frac{1}{x'_{2c}} = -\frac{1}{30{,}04\cdot 10^{-3}} + \frac{2}{6{,}5\cdot 10^{-3}} = 274{,}40\ D$$

$$x'_{2c} = 3{,}64\ mm$$

$$y'_{2c} = 11{,}10\,\frac{3{,}64}{30{,}04} = 1{,}35\ mm$$

1º Superficie del cristalino

x_{1L} = 30,66 mm
r_{1L} = 10,2 mm

$$\frac{1}{x'_{1L}} = -\frac{1}{30{,}66\cdot 10^{-3}} + \frac{2}{10{,}2\cdot 10^{-3}} = 163{,}46\ D$$

$$x'_{1L} = 6{,}12\ mm$$

$$y'_{1L} = 12{,}81\,\frac{6{,}12}{30{,}66} = 2{,}56\ mm$$

2º Superficie del cristalino

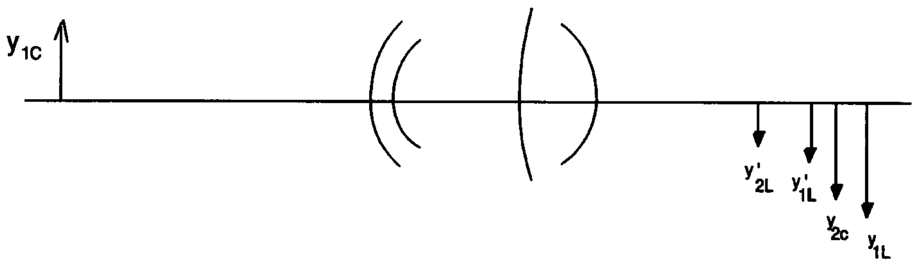
x_{2L} = 23,46 mm
r_{2L} = 6 mm

$$\frac{1}{x'_{2L}} = -\frac{1}{23{,}46\cdot 10^{-3}} + \frac{2}{-6\cdot 10^{-3}} = -375{,}96\ D$$

$$x'_{2L} = -2{,}66\ mm$$

$$y'_{2L} = 10{,}80\,\frac{-2{,}66}{23{,}46} = 1{,}22\ mm$$

2.8 La imagen dióptrica formada por la primera superficie del cristalino se encuentra a una distancia de 26,18 mm de esta y tiene un tamaño de - 8,94 mm. Calcular la posición y los tamaños de las otras imágenes dióptricas, así como la posición y el tamaño del objeto.



Aplicaremos la relación de conjugación

$$X' = X + P$$

para calcular la posición de estas imágenes. Debemos tener en cuenta que la imagen a través de la superficie sirve de objeto para la otra.

Para calcular el tamaño utilizaremos la fórmula del aumento

$$\frac{y'}{y} = \frac{X}{X'}$$

Puesto que conocemos la posición de la imagen respecto a la primera superficie del cristalino, empezaremos calculando su antiimagen:

1º Superficie del cristalino

n_{1L} = 1,3374 (h.acuoso)
n_{1L}' = 1,42 (cristalino)
x_{1L}' = 26,18 mm
r_{1L} = 10,2 mm

$$X_{1L} = \frac{1,42}{26,18 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,42 - 1,3374}{10,2 \cdot 10^{-3}} = 46,14 \ D$$

$$x_{1L} = \frac{1,3374}{46,14} = 28,98 \ mm$$

$$y_{1L} = \frac{54,24}{46,14} \cdot (-8,94) = -10,51 \ mm$$

2º Superficie de la córnea

n_{2c} = 1,3771 (córnea)
n'_{2c} = 1,3374 (h.acuoso)
$x'_{2c} = x_{1L} + P_{ca}$ = 28,98 + 3 = 31,98 mm
r_{2c} = 6,5 mm

$$X_{2c} = \frac{1,3374}{31,98 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,3374 - 1,3771}{6,5 \cdot 10^{-3}} = 47,93 \ D$$

$$x_{2c} = \frac{1,3771}{47,93} = 28,73 \ mm$$

$$y_{2c} = \frac{41,82}{47,93} \cdot (-10,51) = -9,17 \ mm$$

1º Superficie de la córnea

n_{1c} = 1 (aire)
n'_{1c} = 1,3771 (córnea)
$x'_{1c} = x_{2c} + e_c$ = 28,73 + 0,55 = 29,28 mm
r_{1c} = 7,8 mm

$$X_{1c} = \frac{1,3771}{29,28 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,3771 - 1}{7,8 \cdot 10^{-3}} = -1,31 \ D$$

$$x_{1c} = \frac{1}{-1,31} = -761 \ mm$$

$$y_{1c} = \frac{47,03}{-1,31} \cdot (-9,17) = 329 \ mm$$

Calculemos a continuación la imagen a través de la segunda superficie del cristalino:

n_{2L} = 1,42 (cristalino)
n'_{2L} = 1,3771 (córnea)
$x_{2L} = x_{1L}' - e_L$ = 26,18 - 4 = 22,18 mm
r_{2L} = 6 mm

$$X'_{2L} = \frac{1{,}42}{22{,}18\cdot 10^{-3}} + \frac{1{,}42 - 1{,}336}{-6\cdot 10^{-3}} = 78{,}02\ D$$

$$x'_{2L} = \frac{1{,}336}{78{,}02} = 17{,}12\ mm$$

$$y'_{2L} = \frac{64{,}02}{78{,}02}\cdot(-8{,}94) = -7{,}33\ mm$$

2.9 ¿Cuál debe ser el índice total del cristalino del ojo teórico para que el foco imagen esté exactamente a 24 mm del vértice corneal (*S*)?

Sea n

$$n = 1{,}41 + æ$$

$SF'_c = 31{,}51$ $\qquad SV_{1L} = 3{,}6\ mm$

$$V_{1L}F'_c = V_{1L}S + SF'_c = 31{,}51 - 3{,}6 = 27{,}91\ mm$$

$$a_1 = 27{,}91\ mm$$

$$SR - SV_{2L} = 24 - 3{,}6 = 16{,}4\ mm$$

$$f'_1 = \frac{(1{,}41 + æ)\cdot r_1}{(1{,}41 + æ) - n_{HA}}$$

$$f'_2 = \frac{n_{HV}\cdot r_2}{n_{HV} - (1{,}41 + æ)}$$

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n'}{f'}$$

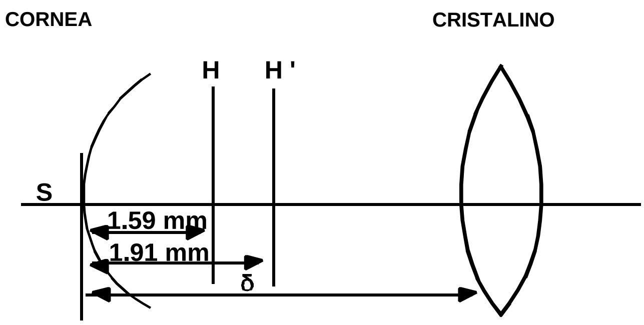
$$a_1 \xrightarrow{\quad f'_1 \quad} a'_1$$

$$a_2 = a'_1 - V_{1L}V_{2L} \xrightarrow{\quad f'_2 \quad} a'_2 = 16{,}4\ mm$$

$$æ = 0{,}014$$

$$\boldsymbol{n = 1{,}424}$$

2.10 Obtener las potencias de la córnea y del cristalino y la distancia reducida, para el ojo simplificado en el que los planos principales y la potencia total coinciden con los del ojo teórico. (ojo *HH'P*).



$SH = 1{,}59\ mm \qquad SH^{/} = 1{,}91\ mm \qquad P = 59{,}94\ D$

$P = P_1 + P_2 - \delta \cdot P_1 \cdot P_2 = P_c + P_L - \delta \cdot P_c \cdot P_L = 59{,}94\ D$

$$\overline{H_1 H} = 1{,}59 = n \cdot \delta \frac{P_L}{P} \qquad (n = 1)$$

$$\overline{H_2^{/} H^{/}} = 1{,}91 - e = 1{,}91 - n_{HV} \cdot \delta = -n^{/} \cdot \delta \frac{P_c}{P} \qquad (n^{/} = n_{HV})$$

$\boldsymbol{P_c = 32{,}95 \qquad P_L = 30{,}14 \qquad \delta = 3{,}17\ mm}$

2.11 Ídem para el ojo simplificado en que el plano principal imagen, el foco imagen y la potencia resultante coinciden con los del ojo teórico.(ojo *H'F'P*)

Imponemos

$$r_c = \frac{n_{HV} - 1}{P_c} = 8 \qquad P_c = 42\ D$$

$$\overline{H_2^{/} H^{/}} = 1{,}91 - n_{HV} \cdot \delta = -n_{hv} \frac{P_L}{P}$$

$$59{,}94 = P_c + P_L - \delta \cdot P_c \cdot P_L$$

$$P_L = 22{,}24 \ D$$

$$\delta = 4{,}78$$

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{6{,}37}$$

2.12 Calcular:
a) la posición de los planos principales del cristalino, refiriéndolos al vértice corneal y los vértices del propio cristalino, en el marco del ojo teórico.
b) la posición de los focos del ojo teórico completo, refiriéndolos al vértice corneal.

a)

$P_L = 21{,}78 \ D \qquad P_1 = 8{,}1 \ D \qquad P_2 = 14 \ D$

$$\overline{H_1 H} = n \cdot \delta \frac{P_2}{P_L} = n_{HA} \frac{P_2}{P_L}$$

$$\delta = \frac{e}{n_L} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1{,}42}$$

$$\overline{H_1 H} = 2{,}42 \ mm$$

$$\overline{H_2^{/} H^{/}} = -n^{/} \cdot \delta \frac{P_1}{P} = -n_{HV} \cdot \delta \frac{P_1}{P}$$

$$\overline{H_2^{/} H^{/}} = -1{,}4 \ mm$$

$$\overline{SH} = \overline{SH_1} + \overline{H_1 H} = 3{,}6 + 2{,}42 = 6{,}02 \ mm$$

$$\overline{SH^{/}} = \overline{SH_2^{/}} + \overline{H_2^{/} H^{/}} = 7{,}6 + (-1{,}4) = 6{,}20 \ mm$$

b)

$$\overline{HF} = -\frac{n}{P} = -\frac{1}{54{,}94} = -16{,}68 \ mm$$

$$\overline{H'F'} = \frac{n'}{P'} + \frac{n_{HV}}{P} = \frac{1{,}336}{54{,}94} = 22{,}29 \ mm$$

$$\overline{SH} = 1{,}59 \qquad \overline{SF} = \overline{SH} + \overline{HF} = 1{,}59 + (-16{,}68) = -15{,}09 \ mm$$

$$\overline{S'H'} = 1{,}91 \qquad \overline{SF'} = \overline{SH'} + \overline{H'F'} = 1{,}91 + 22{,}29 = 24{,}2 \ mm$$

2.13 Demuéstrese que en el ojo simplificado *HH'P*, la pupila de salida se encuentra delante de la pupila real.

$$P_2 = 30{,}14 \ D \qquad \delta = 3{,}17 \ mm \qquad e = n_{HV} \cdot \delta = 4{,}23 \ mm$$

$$a = 3{,}6 - e = -0{,}63 \ mm$$

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + P_2 \qquad a' = \frac{n' \cdot a}{n' + a \cdot P_2} = -0{,}64 \ mm$$

Luego la distancia del diafragma de apertura a la pupila de salida será:

$$-0{,}64 - (-0{,}63) = -0{,}01 \ mm$$

2.14 Verificar que las pupilas de entrada y de salida, calculadas como antiimagen e imagen del iris dadas por la córnea y el cristalino respectivamente, son puntos conjugados respecto del ojo completo.

$$\frac{y'}{y} = \frac{X}{X'} = \frac{X}{X + P}$$

$$x = \overline{HP_E} = \overline{HS} + \overline{SP_E} = \overline{SP_E} - \overline{SH} = 3{,}04 - 1{,}59$$

$$X = \frac{10^{-3}}{3{,}04 - 1{,}59} = 690 \ D$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{690}{690 + 60} = 0{,}92 \qquad c.s.q.d.$$

2.15

a) Calcular la posición de la primera y segunda imágenes de Purkinje.

b) Calcular el tamaño de estas imágenes de Purkinje para un objeto de tamaño "y". Comparar, en cada caso, con el tamaño de la primera imagen.

a)

$n = -n' = 1$

1ª)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}$$

$x_1 = -500 \;\; mm$

$$x_1' = \frac{r_{1c} \cdot x_1}{2 \cdot x_1 - r_{1c}} = \frac{7{,}8 \cdot (-500)}{2\,(-500) - 7{,}8} = 3{,}87 \;\; mm$$

2ª)

$$-\frac{1}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n'}{f'}$$

A)

$$\frac{-1}{-500} + \frac{n_c}{a'} = \frac{n_c}{f'}$$

$$f' = \frac{n_c \cdot r_1}{n_c - 1} = \frac{1{,}3771 \cdot 7{,}8}{0{,}3771}$$

$$\frac{1}{500} + \frac{1{,}3771}{a'} = \frac{1{,}3771}{28{,}4842}$$

$\boldsymbol{a' = 29{,}7134 \;\; mm}$

B)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{r_{2c}}$$

$$\frac{1}{29{,}7134-0{,}55}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{6{,}5} \qquad \boldsymbol{a'=3{,}6576\ \ mm}$$

C)

$$-\frac{1}{a}+\frac{1{,}3771}{3{,}6576+0{,}55}=\frac{1{,}3771}{28{,}4842}$$

$$\boldsymbol{a=3{,}58\ \ mm}$$

b)

1ª)

$$\frac{y'}{y}=-\frac{a'}{a}$$

$$y_1'=-\frac{3{,}87}{-500}\,y=7{,}74\cdot 10^{-3}\cdot y$$

(VIRTUAL DERECHA)

2ª)

A)

$$\frac{y_1'}{y}=\frac{29{,}7134}{1{,}3771\cdot(-500)}$$

B)

$$\frac{y_2'}{y_1'}=\frac{-3{,}6576}{29{,}1634}$$

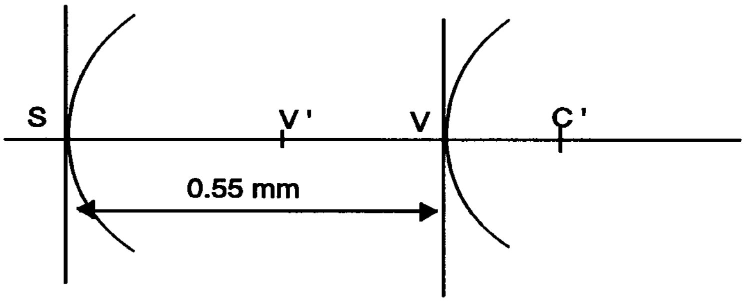
C)

$$\frac{y_2'}{y_1}=\frac{4,2076}{1,3771\cdot 3,585}$$

$$y'=\frac{1,3771\cdot 3,585}{4,2076}\cdot\frac{-3,6576}{29,1634}\cdot\frac{29,7134}{1,371\cdot(-500)}\cdot y$$

$$y'=0,0064\cdot\frac{y_1'}{7,74\cdot 10^{-3}} \qquad y'=0,82\cdot y_1'$$

2.16 Resolver la segunda imagen de Purkinje por el método del espejo equivalente.



$$f_1'=\frac{n\cdot r_1}{n'-n}=\frac{1,3771\cdot 7,8}{0,3771}$$

$$-\frac{n}{a_V'}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'} \qquad \frac{-1}{a_V'}+\frac{1,3771}{0,55}=\frac{1,3771\cdot 0,3771}{1,3771\cdot 7,8}$$

$$R=a_c'-a_V'=6,39$$

$$\frac{1}{a_V'}=\frac{1,3771}{0,55}-\frac{0,3771}{7,8}$$

$$\frac{1}{a_c'}=\frac{1,3771}{6,5+0,55}-\frac{0,3771}{7,8}$$

$$a_V'=0,4073$$

$a_c^{/} = 6{,}8033$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^{/}} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{-500 - 0{,}4073} + \frac{1}{a^{/}} = \frac{2}{6{,}3960}$$

$a^{/} = 3{,}1777 \qquad a^{/} = 3{,}1777 + 0{,}4073 = 3{,}585$

$$= -\frac{3{,}1777}{-500{,}4073} \qquad 0{,}0064 \cdot y = 0{,}0064 \cdot \frac{y_1^{/}}{7{,}74 \cdot 10^{-3}}$$

$\boldsymbol{y^{/} = 0{,}82 \cdot y_1^{/}}$