

# LIBRO DE RESÚMENES

NOLINEAL 2007

CIUDAD REAL, 6–9 DE JUNIO DE 2007

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA



# Índice general

Comités del congreso	3
Horario	5
Lista de conferencias plenarias	7
Contenidos de las sesiones paralelas	9
Resúmenes de las conferencias plenarias	19
Resúmenes de las comunicaciones orales	27
Resúmenes de los paneles	83
Lista alfabética de autores	105



### Comité organizador

- Víctor M. Pérez-García — *Director* (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Miguel Ángel López Guerrero — *Subdirector* (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Alfonso Bueno Orovio — *Secretario* (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Lluís Alsedà (Universidad Autónoma de Barcelona)
- Francisco Balibrea Gallego (Universidad de Murcia)
- Susanna Cuevas Manrubia (Centro de Astrobiología)
- Amadeu Delshams (Universidad Politécnica de Cataluña)
- Pedro Fernández de Córdoba (Universidad Politécnica de Valencia)
- Mario Floria (Universidad de Zaragoza)
- José Luis Rodríguez Marrero (Universidad Pontificia de Comillas)
- Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos de Madrid)
- Germán de Valcárcel (Universidad de Valencia)
- Luis Vázquez (Universidad Complutense de Madrid)
- Vadym Vekslerchik (Universidad de Castilla-La Mancha)

### Comité local

- Adrian Alexandrescu (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Juan Belmonte (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Mari Cruz Navarro (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Francisco Plá (Universidad de Castilla-La Mancha)
- Miguel Ángel García March (Universidad Politécnica de Valencia)
- Vladyslav Prytula (Universidad de Castilla-La Mancha)



# Horario

	Miércoles 6 de Junio	Jueves 7 de Junio	Viernes 8 de Junio	Sábado 9 de Junio
9:30—10:15	Inauguración	<b>Charlas plenarias</b> Arcadi Navarro	<b>Charlas plenarias</b> Humberto Michinel	<b>Sesiones paralelas</b> 31, 32, 33
10:15—11:00	<b>Charla plenaria</b> Javier Gómez	Carlos Escudero	Rafael Bravo	
11:00—11:30	Desayuno			
11:30—12:15	<b>Sesiones paralelas</b> 1, 2, 3	<b>Sesiones paralelas</b> 13, 14, 15	<b>Sesiones paralelas</b> 19, 20, 21	<b>Charlas plenarias</b> Henar Herrero
12:15—12:30	Descanso			
12:30—12:45				
12:45—13:00	<b>Sesiones paralelas</b> 4, 5, 6	<b>Sesiones paralelas</b> 16, 17, 18	<b>Sesiones paralelas</b> 22, 23, 24	Clausura del congreso y comida
13:00—13:45	Comida			
14:00—15:00	Comida			
15:00—15:45	<b>Charla plenaria</b> Gustavo Deco	<b>Actividad Cultural</b> ● Viaje a Almadén  ● <b>Conferencia plenaria:</b> Luis Martínez Salamero  ● Visita al parque minero y a la ciudad  ● Cena del congreso en la Plaza de Toros  ● Vuelta a Ciudad Real	<b>Charla plenaria</b> Gonzalo Álvarez	
15:45—16:30	Descanso		Descanso	
16:30—16:45	<b>Sesiones paralelas</b> 7, 8, 9		<b>Sesiones paralelas</b> 25, 26, 27	
16:45—17:45	Merienda		Merienda	
17:45—18:15	<b>Sesiones paralelas</b> 10, 11, 12		<b>Sesiones paralelas</b> 28, 29, 30	
18:15—19:15				
20:00			<b>Sesión de Poster</b>	
20:30	<b>Recepción</b> Real Casa de la Misericordia Rectorado UCLM		<b>Vino español</b> <b>Entrega de premios</b>	





## Lista de conferencias plenarias

Las conferencias plenarias se celebrarán en la *Escuela Universitaria de Magisterio de Ciudad Real* exceptuando la charla del jueves 7 de junio por la tarde que se celebrará durante la visita cultural en la *Escuela Universitaria Politécnica de Almadén*.

<i>Predicción de terremotos en modelos de fallas sísmicas</i>	
Javier B. Gómez	pág. 21
Miércoles 6 de Junio, 10:15–11:00	
Modera: Mario Floria	
<i>Mecanismos neurodinámicos subyacentes a la toma de decisiones</i>	
Gustavo Deco	pág. 21
Miércoles 6 de Junio, 15:45–16:30	
Modera: Susanna Cuevas Manrubia	
<i>Modelado y análisis de procesos de especiación cromosómica</i>	
Arcadi Navarro	pág. 22
Jueves 7 de Junio, 9:30–10:15	
Modera: Pedro Fernández de Córdoba	
<i>Ecuaciones estocásticas de crecimiento tumoral</i>	
Carlos Escudero	pág. 22
Jueves 7 de Junio, 10:15–11:00	
Modera: Pedro Fernández de Córdoba	
<i>Electrónica de Potencia: Una perspectiva desde la dinámica de sistemas no lineales</i>	
Luis Martínez Salamero	pág. 23
Jueves 7 de Junio, 16:45–17:30	
Modera: José Luis Rodríguez Marrero	
<i>Líquidos de luz, billares cuánticos y la ecuación cúbico-quintica no lineal de Schrödinger</i>	
Humberto Michinel	pág. 23
Viernes 8 de Junio, 9:30–10:15	
Modera: Germán de Valcárcel	
<i>Métodos de agregación de variables en modelos de dinámica de poblaciones</i>	
Rafael Bravo de la Parra	pág. 24
Viernes 8 de Junio, 10:15–11:00	
Modera: Germán de Valcárcel	
<i>Aplicaciones de los códigos de Gray a la criptografía caótica</i>	
Gonzalo Álvarez Maraño	pág. 24
Viernes 8 de Junio, 15:45–16:30	
Modera: Lluís Alsedà	
<i>Modelado matemático de fenómenos termoconvectivos en huracanes</i>	
Henar Herrero	pág. 25
Sábado 9 de Junio, 11:30–12:15	
Modera: Amadeu Delshams	
<i>Cálculo de variedades invariantes normalmente hiperbólicas con aplicaciones en misiones espaciales</i>	
Josep J. Masdemont	pág. 25
Sábado 9 de Junio, 12:15–13:00	
Modera: Amadeu Delshams	



# CONTENIDOS DE LAS SESIONES PARALELAS



Sesión 1: Redes sociales			
Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: SUSANNA C. MANRUBIA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	El triángulo del crimen: un modelo dinámico para controlar la población criminal	Juan Carlos Nuño	29
11:50	Redes de la Yihad: Estudio comparativo del 11S y del 11M desde el punto de vista de las Redes Complejas	Juan José Miralles Canals	29
12:10	Dinámica Evolutiva de la Cooperación en Redes Complejas	Julia Poncela	30

Sesión 2: Mecánica celeste			
Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: JOSEP MASDEMONT			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Estudio cualitativo del problema del anillo de $(N + 1)$ cuerpos	Fernando Blesa	30
11:50	Comportamiento asintótico del parámetro de estabilidad para una familia de ecuaciones de Hill	Anna Samà Camí	30
12:10	Técnicas de matching complejo en la ecuación de Hamilton-Jacobi	Carme Olivé	31

Sesión 3: Métodos numéricos			
Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: PEDRO FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Un método iterativo para la resolución de EDP con condiciones de contorno no lineales	José Román Galo Sánchez	31
11:50	Sobre una clase de interpolaciones de Hermite no lineales	Sergio Amat	32
12:10	Von Neumann type Stability Analysis for a Scheme approximating Fractional Evolution-Diffusion Equations	Teresa Pierantozzi	33

Sesión 4: Mecánica de fluidos			
Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)			
MODERA: HENAR HERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Flujos de materia auto-semejantes en astrofísica	Jose Gaité	33
13:05	Convección con rotación en cilindros: efectos centrífugos.	Francisco Marques	34
13:25	Inestabilidades en convección Rayleigh- Bénard bajo calentamiento localizado	María Cruz Navarro Lérida	34

Sesión 5: Biología molecular			
Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)			
MODERA: ARCADI NAVARRO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Detección composicional entrópica de estructuras de interés en secuencias de ADN	Juan Francisco Gómez Lopera	35
13:05	Propiedades colectivas de cuasiespecies en evolución molecular	Michael Stich	35
13:25	Dinámica de la vía de señalización del receptor de interacción tipo I	Jorge Elorza	36

## Sesión 6: Solitones espaciales i

Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)

MODERA: GERMÁN DE VALCÁRCEL

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Nonlinear tunneling of BEC in an optical lattice: signatures of quantum collapse and revival	Vladimir V. Konotop	36
13:05	Tablero de Galton óptico no lineal	Carlos Navarrete	36
13:25	Suprasolitones: Ondas no lineales en cadenas de solitones atómicos.	David Nóvoa Fernández	37

## Sesión 7: Vórtices

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

MODERA: HUMBERTO MICHINEL

Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	Vórtices dipolares	Miguel Ángel García-March	37
17:05	Supresión del comportamiento oscilatorio en la rotura de vórtices.	Juan M. Lopez	38
17:25	Desintegración de vórtices en sistemas con simetría discreta	Albert Ferrando	39

## Sesión 8: Bifurcación y control

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

MODERA: MIGUEL A. LÓPEZ GUERRERO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	A new mechanism for the chaos suppression	Arsen Dzhanoev	40
17:05	La bifurcación foco-centro-ciclo límite en la detección de bifurcaciones silla-nodo de conos invariantes en sistemas lineales a trozos	Victoriano Carmona Centeno	40
17:25	Bifurcación de ciclos límite de un gráfico compacto monodrómico a través del inverso de factor integrante	Isaac A. García	41

## Sesión 9: Fisiología i

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

MODERA: GUSTAVO DECO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	Fitting a dynamical systems model of the kinetics of physiological variables to experimental data: application of a stochastic optimization routine	Maria S. Zakynthinaki	42
17:05	Detección y clasificación de potenciales de acción en señales neurofisiológicas mediante técnicas bayesianas	Raúl Benítez Iglesias	42
17:25	A biophysical model to explore the effects of network activity on short-term synaptic depression	José Manuel Benita	43

## Sesión 10: Solitones espaciales ii

Miércoles 6 de Junio (18:15–19:15)

MODERA: ALBERT FERNANDO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Hipersolitones en redes ópticas inducidas	Maria Rodas Verde	44
18:35	Formación de patrones en resonadores termoacústicos	Isabel Perez-Arjona	44
18:55	Simetrías de Lie y soluciones exactas para ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad modulada espacialmente	Juan Belmonte Beitia	45

Sesión 11: Caos hamiltoniano			
Miércoles 6 de Junio (18:15–19:35)			
MODERA: AMADEU DELSHAMS			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Dispersión caótica en sistemas hamiltonianos con escapes sometidos a ruido y disipación	Jesús M. Seoane	45
18:35	Cálculo numérico de números de rotación y sus variaciones	Alejandro Luque	46
18:55	Rydberg Hydrogen atom near a metallic surface: Stark regime through two pitchfork bifurcations	José Pablo Salas	46
19:15	Frontera orden-caos y cicatrices cuánticas en sistemas moleculares	Francisco Javier Arranz	47

Sesión 12: Ciclos límite y sistemas integrables			
Miércoles 6 de Junio (18:15–19:35)			
MODERA: MIGUEL ÁNGEL LÓPEZ GUERRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Ciclos límite para sistemas cúbicos con simetría de orden 4	María Jesús Álvarez	48
18:35	Polynomial planar vector field with algebraic limit cycles	Rafael Ramírez I.	48
18:55	Integrability and multiple invariant algebraic curves	Chara Pantazi	48
19:15	Superficies de Riemann y complejidad en sistemas dinámicos	David Gómez-Ullate Oteiza	49

Sesión 13: Análisis y modelos económicos			
Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: LLUÍS ALSEDA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	La técnica de datos surrogados en el análisis de la serie de rendimientos del IBEX-35	M <sup>a</sup> Victoria Caballero Pintado	49
11:50	Análisis en tiempo-frecuencia de series caóticas en comunicaciones y finanzas	Álvaro Arenas Pingarrón	50
12:10	On the reduced finite difference schemes of implicit type and its applications in Option Pricing	Antonio Falcó	50

Sesión 14: Dinámica cardiaca			
Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: ALFONSO BUENO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Causes of tachycardia in patients with Brugada syndrome: a simulation study.	Blas Echebarria	52
11:50	La entropía muestral en el dominio wavelet predice la terminación de arritmias cardíacas supraventriculares	Raul Alcaraz Martínez	52
12:10	Modelling the heart rate kinetics in response to exercise as a dynamical system	James R. Stirling	53

Sesión 15: Química no lineal			
Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: PEDRO FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Caracterización del estado de transición de la reacción de isomerización: LiNC $\leftrightarrow$ LiCN en 3D	Jesús F. Palacián	53
11:50	Estudio de la transferencia de energía en moléculas triatómicas mediante el análisis de frecuencias	Juan Carlos Losada	54
12:10	Ruido interno y la rotura espontánea de quiralidad molecular	David Hochberg	54

### Sesión 16: Caos en sistemas dinámicos

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

MODERA: AMADEU DELSHAMS

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Una nota sobre sistemas dinámicos discretos caóticos e infinitamente derivables	Juan Luis García Guirao	55
13:05	Caos distribucional para operadores en espacios de sucesiones	Alfred Peris	55
13:25	Caos en el acoplamiento de dos Brusselators	Fátima Drubi Vega	56

### Sesión 17: Procesado de imágenes y visión

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

MODERA: SERGIO AMAT

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Comparing noise reduction techniques for visual reflected glare	Manuel Sillero Quintana	56
13:05	Eliminación de ruido en imágenes de color utilizando técnicas no lineales	Juan Carlos Trillo	56
13:25	Restauración de imágenes mediante difusión no lineal con condición de parada basada en los coeficientes wavelet	Francisco Rodenas	57

### Sesión 18: Dinámica poblaciones

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

MODERA: RAFAEL BRAVO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Persistencia y estabilidad global en sistemas depredador-presa con retraso.	Clotilde Martínez	58
13:05	Cuasiespecies virales en 2 dimensiones: efectos de la difusión en la competencia y la diversidad	Jacobo Aguirre Araujo	58
13:25	Metasoluciones en dinámica de poblaciones	Santiago Cano Casanova	59

### Sesión 19: Gravitación y cosmología

Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)

MODERA: MARIO ZACARÉS

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Equilibrios relativos inestables y misiones de larga duración alrededor de satélites naturales	Martín Lara	60
11:50	Inestabilidad local y exponentes finitos de Lyapunov en hamiltonianos. Aplicación a potenciales galácticos	Juan C. Vallejo	60
12:10	Casimir effect: dynamical & cosmological	Emilio Elizalde	61

### Sesión 20: Métodos numéricos iterativos

Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)

MODERA: ALFONSO BUENO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Dinámica en el estudio de la convergencia de una familia de procesos iterativos	Natalia Romero Álvarez	61
11:50	Iterative methods for eigenvectors	Salvador Jiménez	61
12:10	Sobre un método de tercer orden para sistemas de ecuaciones no lineales	Sonia Busquier	62



Sesión 21: Dinámica y estructura de redes			
Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)			
MODERA: MARIO FLORIA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
11:30	Relación entre topología de red y dinámica en redes inhibitorias de bursters	Borja Ibarz Gabardós	62
11:50	Caracterización de la “robustez dinámica” en redes complejas	Juan Antonio Almendral Sánchez	63
12:10	Hierarchical structures induce long range dynamical correlations in written texts	Enrique Alvarez-Lacalle	63

Sesión 22: Sistemas forzados y resonancias			
Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)			
MODERA: JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ MARRERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Regiones de estabilidad en el Modelo del Microtrón	Oswaldo J. Larreal B.	64
13:05	Rocking: Un nuevo tipo de forzamiento resonante de sistemas disipativos autooscilantes	Germán J. de Valcárcel	64
13:25	Resonancias en columna de agua oscilante: un estudio asintótico, numérico y experimental	Arturo Olvera	65

Sesión 23: Existencia de soluciones			
Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)			
MODERA: FRANCISCO BALIBREA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Atractores para sistemas de infinitas ecuaciones diferenciales	Francisco Morillas	65
13:05	Atractores para ecuaciones diferenciales paramétricas con retardo sin unicidad y semi-continuidad superior	Pedro Marín-Rubio	65
13:25	Inestabilidades y colapso en mezclas de bosones y fermiones	Vladyslav Prytula	66

Sesión 24: Geociencias			
Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)			
MODERA: JAVIER GÓMEZ JIMÉNEZ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
12:45	Espetros de energía de los breathers en la transformación reconstructiva de la mica muscovita	Juan F. R. Archilla	66
13:05	Morfología y dinámica de formas amorfas y cristalinas de hielo	Bruno Escribano Salazar	66
13:25	Calibración de la entropía de Shannon para evaluar la heterogeneidad de distribuciones masa-tamaño	José-Manuel Rey	67

Sesión 25: Caos y control			
Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)			
MODERA: LUIS MARTÍNEZ SALAMERO			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	Huellas de los movimientos homo y heteroclínicos en la mecánica cuántica	Florentino Borondo	68
17:05	Chaotic pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit	Manuel Iñarrea	68
17:25	Control por la fase de sistemas dinámicos	Samuel Zambrano	69

## Sesión 26: Solitones espaciales iii

Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)

MODERA: VADYM VEKSLERCHIK

Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	Solitones de cavidad en láseres bidireccionales	Eugenio Roldán	69
17:05	Quantum Entangled Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates on Optical Lattices	Lincoln D. Carr	69
17:25	Subdiffractive solitons in Kerr-nonlinear photonic crystals, and spatio-temporally modulated BECs	Kestutis Staliunas	70

## Sesión 27: Sincronización en sistemas complejos

Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)

MODERA: IRENE SENDIÑA NADAL

Hora	Título	Conferenciante	pág.
16:45	Synchronizability determined by coupling strengths and topology on Complex Networks	Yamir Moreno	70
17:05	Sincronización de redes complejas por enlaces repulsivos dispersos	Inmaculada Leyva Callejas	70
17:25	Using Lyapunov Exponents to detect Synchronized States	Jean Bragard	71

## Sesión 28: Estructura de redes

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

MODERA: YAMIR MORENO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Resultados analíticos sobre las propiedades de los grafos de Albert-Barabási utilizando la teoría del campo medio	Benito Hernández-Bermejo	71
18:35	Redes musicales	Javier M. Buldú	71
18:55	Modelos generalizados de enlace preferencial en redes complejas heterogéneas	Antonio Santiago	72

## Sesión 29: Dinámica de resonadores

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

MODERA: EUGENIO ROLDÁN

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Generación paramétrica en resonadores acústicos	Víctor Espinosa	73
18:35	Comparación de estructuras topológicas experimentales y teóricas en señales caóticas de un láser de fibra dopada con erbio	Javier Used Villuendas	73
18:55	Control del retraso en la sincronización de los láseres de semiconductor	Cristina Martínez González	73

## Sesión 30: Orden en sistemas dinámicos estocásticos

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

MODERA: CARLOS ESCUDERO

Hora	Título	Conferenciante	pág.
18:15	Efecto de la memoria en redes Booleanas.	Juan Pablo Cárdenas Villalobos	74
18:35	Sobre la paradoja de Parrondo	Antonio Linero Bas	75
18:55	Transición de fase en un algoritmo estocástico de generación de primos.	Bartolo Luque	75

Sesión 31: Campos analíticos y/o complejos			
Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)			
MODERA: LLUÍS ALSÈDÀ			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Linearización de campos vectoriales $C^\infty$ en el plano $\mathbb{C}^2$ mediante simetrías de Lie	Susanna Maza	76
9:50	Sobre una conjetura de Morse para flujos analíticos sobre superficies	Gabriel Soler López	76
10:10	Medallones de espiral múltiple en el conjunto de Mandelbrot	Gerardo Pastor	77
10:30	Ciclicidad del anillo de periodo en una familia de centros nilpotentes	Maite Grau Montaña	78

Sesión 32: Análisis de series temporales			
Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)			
MODERA: FRANCISCO BALIBREA			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Geometric Noise Reduction for Multivariate Time Series	M. Eugenia Mera	78
9:50	Interpolación con redes neuronales artificiales en las series temporales intervenidas para la predicción de la demanda arbana de agua	Manuel Herrera	78
10:10	Entropía de permutación topológica y aplicaciones	José María Amigó	79
10:30	An study of air temperature dynamics by NonLinear Time Series Analysis	María del Mar Artigao	79

Sesión 33: Dinámica de fluidos			
Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)			
MODERA: FRANCISCO MARQUÉS			
Hora	Título	Conferenciante	pág.
9:30	Soluciones temporales para un problema de convección con viscosidad variable	Francisco Pla	80
9:50	Control de estabilidad y transición catastrófica en un sistema de Taylor–Couette.	Marc Avila	80
10:10	Tratamiento de paredes en métodos de lattice Boltzmann para la simulación de flujo fluido	Salvador Izquierdo Estallo	81
10:30	Sobre la propiedad de Kneser del sistema tri-dimensional de Navier-Stokes	José Valero	81



# CONFERENCIAS PLENARIAS



## Predicción de terremotos en modelos de fallas sísmicas

Javier B. Gómez

*Facultad de Ciencias*

*Universidad de Zaragoza*

*Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza, España*

E-MAIL: [jgomez@unizar.es](mailto:jgomez@unizar.es)

WWW: <http://gmg.unizar.es>

COLABORADORES: Amalio F. Pacheco (Universidad de Zaragoza), Álvaro González Gómez (Universidad de Zaragoza), Nico Abadías (Universidad de Zaragoza), Miguel Vázquez-Prada

La predicción de sistemas complejos se ha enfocado históricamente desde muy variados puntos de vista, en parte por la enorme diversidad de los sistemas complejos. Uno de los sistemas complejos naturales de más relevancia son los terremotos, acerca de cuya predecibilidad se ha hablado mucho y ha suscitado en los últimos años un gran debate, con posiciones encontradas [1].

El primer problema con que uno se enfrenta al hablar de predicción de terremotos es la ambigüedad intrínseca del concepto mismo. “Predecir” un terremoto no significa lo mismo para un científico que para el hombre de la calle o un periodista. Unas definiciones de predicción son más estrictas y otras más “flexibles”, por lo que la respuesta a la pregunta “¿Se pueden predecir los terremotos?” puede ser negativa frente a una definición y positiva frente a otra. Por tanto, lo primero que hay que dejar claro es lo que se entiende por “predicción de terremotos”.

Pero el problema de fondo no es la ambigüedad del término, sino la ausencia de una teoría completa sobre la fuente sísmica. Aunque parezca increíble, no se conoce con exactitud el mecanismo por el que un terremoto se produce, ni cuál va a ser su tamaño, ni las réplicas que va a tener. Esta ausencia de una teoría física completa es lo que dificulta, no ya su predicción, sino su propia comprensión.

Desde los años 90 se intenta explicar los terremotos como un fenómeno “crítico” de la corteza terrestre, entendida ésta como un sistema complejo lejos del equilibrio. Los vocablos criticidad autoorganizada, complejidad, caos de baja dimensionalidad, fractales, intermitencia y autómatas celulares han pasado a formar parte de la jerga habitual para describir el fenómeno de los terremotos y las fallas sísmicas, que son la fuente de los terremotos.

La mera introducción de estos conceptos ha alejado un poco el santo grial de la predicción de terremotos, ya que muchos sistemas complejos en estado “crítico” tienen una baja predecibilidad. Lejos quedan ya los intentos de conseguir una predicción determinista (hard) de un terremoto y los intentos actuales están casi todos ellos encaminados a una predicción probabilista (soft).

Aquí hacemos un repaso a los diversos intentos actuales para predecir los terremotos, sus éxitos y sus fracasos, sus buenas ideas y sus vías muertas, sus luces y sus sombras, haciendo especial hincapié en los temas que el autor y su grupo han abordado [2, 3, 4, 5, 6, 7].

## Bibliografía

- [1] Nature Debates (1999), Is the reliable prediction of individual earthquakes a realistic scienti-

fic goal?, Ian Main (moderator), 25th february-8th april, 1999, <http://www.nature.com/nature/debates/earthquake/>.

- [2] Abadías, N., González, Á., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F., *Rev. Real Acad. Ciencias Zaragoza*, **61** (2006) 121-134.
- [3] González, Á., Vázquez-Prada M., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F. *Europhys. Lett.*, **68** (2004) 611-617.
- [4] González, Á., Vázquez-Prada M., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F., *Tectonophysics*, **424** (2006) 319-334.
- [5] González, Á., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F. *J. Seismol.*, **10** (2006) 131-135.
- [6] Vázquez-Prada M., González, Á., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F., *Nonlin. Process. Geophys.*, **9**, 513 (2002).
- [7] Vázquez-Prada M., González, Á., Gómez, J.B. y Pacheco, A.F., *Nonlin. Process. Geophys.*, **10**, 565-571 (2003)

---

## Mecanismos neurodinámicos subyacentes a la toma de decisiones

Gustavo Deco

*Departamento de Tecnología*

*Universidad Pompeu Fabra Passeig de Circumval·lació, 8 E-08003 Barcelona*

E-MAIL: [gustavo.deco@upf.edu](mailto:gustavo.deco@upf.edu)

WWW: <http://cns.upf.edu/gustavo/>

La corteza cerebral es un sistema complejo caracterizado por sus diferentes arquitecturas y dinámicas. Una característica común en las mediciones neurofisiológicas de estas dinámicas es el alto grado de variabilidad que presenta la actividad neuronal en y entre diferentes ensayos. Esta variabilidad no es debida ni a limitaciones experimentales ni a un pobre muestreo de la actividad neuronal, sino que desempeña un papel funcional relevante sugiriendo que las fluctuaciones estocásticas de la subyacente dinámica neuronal es fundamental al comportamiento. Por otro lado, el hecho que el fenómeno de percepción y el comportamiento pueda también en condiciones particulares asociarse y describirse por modelos probabilistas, sugiere una íntima relación entre la estocasticidad presente a nivel celular y la estocasticidad presente a nivel conductual. El principal objetivo de este trabajo es dilucidar los mecanismos subyacentes a esta relación. Estableceremos esta relación a través de la construcción explícita de modelos computacionales neurodinámicos que expliquen la medidas experimentales obtenidas tanto a nivel celular ( single cell recordings ) como a nivel conductual. En particular, nos concentraremos en el análisis de tareas perceptuales y conductuales en las que el sujeto exhiba un comportamiento probabilista y en las que existan, o se puedan realizar, mediciones en áreas corticales que muestren actividad neuronal covariante con el comportamiento del sujeto. Específicamente, consideraremos las tareas de detección y de toma de decisiones. Una mejor comprensión de estas operaciones nos permitirá dilucidar los principios neuronales y computacionales que subyacen a la funciones cerebrales asociadas al establecimiento del vínculo entre la información sensorial y la acción motora.

---

## Modelado y análisis de procesos de especiación cromosómica

Arcadi Navarro

*ICREA and Unitat de Biologia Evolutiva.*

*Universitat Pompeu Fabra.*

*c/ Doctor Aiguader 88, 08003 Barcelona*

E-MAIL: [arcadi.navarro@upf.edu](mailto:arcadi.navarro@upf.edu)

The well-known fact that evolutionary rates are not uniformly distributed across the genome [1, 2] has recently been the subject of renewed interest due to the availability of almost complete genome sequences. Comprehensive descriptions of varying rates of molecular evolution in different chromosomes, chromosomal regions, genes, and even different nucleotides have become massively available [3, 4, 5]. Such observations have provided insight into the genetical, historical and demographical variables that influence rates of molecular evolution, generating a complex scenario in which several, mutually compatible, evolutionary mechanisms generate a mosaic genome [6].

Recent studies have enriched this scenario by suggesting a possible association between chromosomal rearrangements and regions of greater divergence [7, 8, 9], but evidence is limited and contradictory [10, 11, 12, 13, 14]. Moreover, it is still unknown to what mechanism such an association (if it exists at all) could be attributed. Indeed, several mechanisms might contribute to an association between rearrangements and larger divergence.

We will present a new class of mathematical models of speciation [7, 10, 15] suggesting that chromosomal rearrangements may play a role in speciation processes based on their recombination-reducing effect in heterokaryotypes [9, 10]. Rearrangements segregating in an ancestral species would act as genetic barriers to gene flow between chromosomes with different organizations, which may eventually result in two daughter species with different chromosomal structures. Under these models, divergence time will be longer, and differentiation greater, in rearranged than in colinear chromosomes in the two species.

We have thoroughly examined the relationship between chromosomal rearrangements and molecular evolution by means of several comparisons of whole genome divergence data coming from different species. Such systematic testing of the predictions of speciation models are allowing us to ascertain when and under which circumstances chromosomal speciation has taken place in nature.

## Bibliografía

- [1] K. H. Wolfe, P. M. Sharp, W. H. Li, *Nature* **337**, 283 (1989).
- [2] K. H. Wolfe, P. M. Sharp, *Journal of Molecular Evolution* **37**, 441 (1993).
- [3] G. Matassi, P. M. Sharp, C. Gautier, *Current Biology* **9**, 786 (1999).
- [4] G. Bernardi, *Gene* **241**, 3 (2000).
- [5] M. J. Lercher, E. J. B. Williams, L. D. Hurst, *Molecular Biology and Evolution* **18**, 2032 (2001).
- [6] S. Paabo, *Nature* **421**, 409 (2003).
- [7] M. A. F. Noor, K. L. Grams, L. A. Bertucci, J. Reiland, *Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.)* **98**, 12084–12088 (2001).

- [8] L. H. Rieseberg, *Trends in Ecol & Evol.* **16**, 351 (2001).
- [9] A. Navarro, N. H. Barton, *Evolution* **57**, 447 (2003).
- [10] A. Navarro, N. H. Barton, *Science* **300**, 321 (2003).
- [11] J. Lu, W. H. Li, C. I. Wu, *Science* **302**, 988 (2003).
- [12] A. Navarro, T. Marques-Bonet, N. H. Barton, *Science* **302** (Nov. 7, 2003).
- [13] T. Marques-Bonet et al., *Trends in Genetics* **20** 524 (2004).
- [14] J. Zhang, X. Wang, O. Podlaha, *Genome Research* **14**, 845 (2004).
- [15] L. H. Rieseberg, S. J. E. Baird, K. A. Gardner, *Plant Molecular Biology* **42**, 205 (2000).

---

## Ecuaciones estocásticas de crecimiento tumoral

Carlos Escudero

*Mathematical Institute*

*University of Oxford*

*24-29 St. Giles'*

*OX1 3LB Oxford, UK*

E-MAIL: [escudero@maths.ox.ac.uk](mailto:escudero@maths.ox.ac.uk)

El crecimiento de tumores sólidos ha sido estudiado en una serie de experimentos que parecen sugerir su similitud a un proceso de crecimiento cristalino conocido como epitaxia de haz molecular. Este proceso ha sido descrito por medio de, entre otras, la ecuación de Mullins-Herring [1, 2]. Esta ecuación, desarrollada para el estudio de crecimientos de capas en sustratos planos, no muestra las adecuadas simetrías que permitirían un uso directo para el caso del tumor. Es nuestro objetivo mostrar como los principios básicos que llevan a la formulación de dicha ecuación se pueden extender y usar para desarrollar modelos capaces de describir la misma fenomenología, pero en sustratos de simetría esférica, más adecuada para el problema en cuestión [3]. El análisis de las ecuaciones resultantes nos permite obtener información que podría ser de interés para comprender los experimentos llevados a cabo y realizar hipótesis sobre situaciones aún inexploradas [4].

## Bibliografía

- [1] W. W. Mullins, *Theory of thermal grooving*, *Journal of Applied Physics* **28**, 333–339 (1957).
  - [2] C. Herring, *Effect of change of scale on sintering phenomena*, *Journal of Applied Physics* **21**, 301–303 (1950).
  - [3] C. Escudero, *Stochastic models for tumoral growth*, *Physical Review E* **73**, 020902(R) (2007).
  - [4] C. Escudero, *Geometrical approach to tumor growth*, *Physical Review E* **74**, 021901 (2007).
-



## Electrónica de Potencia: Una perspectiva desde la dinámica de sistemas no lineales

Luis Martínez Salamero

*Grupo de Automática y Electrónica Industrial ( GAEI )  
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria  
Departament d 'Enginyeria Electrònica  
Universitat Rovira i Virgili  
Campus Sescelades  
Avda Paisos Catalans 26  
43007 Tarragona*

E-MAIL: [luis.martinez@urv.cat](mailto:luis.martinez@urv.cat)

Se presenta la noción de Electrónica de Potencia como concepto interdisciplinario y se subraya su importancia industrial a partir de la enumeración de sus aplicaciones.

Posteriormente se introduce la idea de convertidor conmutado continua - continua como elemento canónico de la Electrónica de Potencia moderna. El objetivo en el diseño de un convertidor es realizar un transformador de corriente continua, lo que requiere utilizar circuitos electrónicos constituidos exclusivamente por elementos reactivos e interruptores, y emplear una apropiada ley de control. La consecución de dicho objetivo requiere la utilización de técnicas no lineales tanto para el modelado como para el control del convertidor.

El modelado se basa en promediar a lo largo de un ciclo de conmutación el comportamiento dinámico de un sistema afín a tramos utilizando la noción de operador de transporte y el desarrollo de Baker -Campbell-Hansdorff. La noción de función descriptiva, o de linealización en frecuencia, se utiliza posteriormente para caracterizar el comportamiento dinámico del modulador de anchura de pulsos, elemento a través del cual se realiza la acción del control del convertidor.

El control no lineal se aborda a partir de la noción de control en modo de deslizamiento, consistente en encontrar la política de apertura y cierre de los interruptores que permita dirigir la trayectoria de ciertas variables de estado a una superficie y confinarla en promedio en la misma. El problema es un caso particular de la solución de ecuaciones diferenciales con segundo miembro discontinuo estudiado por Filipov. En este ámbito se describe un chip micro- electrónico, realizado por el GAEI en colaboración con la UPC en tecnología CMOS de  $0.8 \mu\text{m}$ , que permite la implantación de dicha técnica de control en convertidores.

En el campo del control no lineal se presentará también la noción de control extremal y su aplicación a la obtención del punto de máxima potencia de un panel fotovoltaico. El algoritmo de control es globalmente estable en el sentido de Lyapunov y conduce a un ciclo límite estable en funcionamiento estacionario alrededor del punto de máxima potencia a pesar del cambio de característica del panel por variaciones de irradiación o temperatura.

En este contexto se introducirá también la noción de control por pasividad que permitirá abordar en ciertos convertidores el diseño de leyes de control lineales que garanticen la estabilidad global del sistema en el sentido de Lyapunov.

Finalmente se presentará la noción de modulación caótica y su aplicación al control del espectro del convertidor para mejorar su nivel de compatibilidad electromagnética.

## Líquidos de luz, billares cuánticos y la ecuación cúbico-quíntica no lineal de Schrödinger

Humberto Michinel

*Área de Óptica  
Universidade de Vigo  
Campus de As Lagoas  
32004 - Ourense, Spain*

E-MAIL: [hmichinel@uvigo.es](mailto:hmichinel@uvigo.es)

WWW: <http://optics.uvigo.es>

COLABORADORES: David Nóvoa, Víctor Pérez-García

En el presente trabajo se han analizado las propiedades de tensión superficial de haces de luz que presentan un comportamiento similar al de los líquidos usuales. Estos *condensados de luz*[1] aparecen como soluciones estacionarias de la ecuación no lineal de Schrödinger cúbico-quíntica (NLSCQ), así denominada debido a su dependencia con las potencias cúbica y quíntica de la función de onda tal y como aparecen en la ecuación (adimensional):

$$\nabla^2 \psi + |\psi|^2 \psi - |\psi|^4 \psi = -i\mu\psi. \quad (1)$$

Las soluciones numéricas de dicha ecuación presentan la forma de distribuciones de luz prácticamente constantes dentro de un cierto radio, anulándose fuera del mismo. A medida que el tamaño de las soluciones aumenta, la amplitud tiende al valor  $\sqrt{3}/2$  [2]. Este comportamiento se da no solamente para las soluciones que no tienen ceros, sino también para estados tipo vórtice de cualquier carga topológica.

Un modelo termodinámico para la NLSCQ permite derivar la anterior condición de equilibrio para las soluciones estacionarias infinitas como aquella que minimiza el potencial  $\Omega = E - \mu N$ , siendo  $E$  la energía interna y  $N$  la norma de la solución. De este modo se tiene por primera vez una analogía directa entre líquidos cuánticos y los estados de luz líquida, siendo los estados estacionarios los que anulan la presión del sistema.

Las propiedades de tensión superficial que manifiestan los condensados de luz, pueden ser empleadas para explorar las interacciones entre *gotas de luz* que chocan entre sí de manera análoga a como lo harían partículas cuasi-elásticas. También es posible obtener comportamientos de capilaridad totalmente similares a los observados en los fluidos usuales.

## Bibliografía

- [1] H. Michinel, M. J. Paz-Alonso, and V. M. Pérez-García, *Turning light into a liquid via atomic coherence*, Phys. Rev. Lett. **96**,023903 (2006).
- [2] H. Michinel, J. R. Salgueiro, and M. J. Paz-Alonso, *Square vortex solitons with large angular momentum*, Phys. Rev. E **70**, 066605 (2004).

## Métodos de agregación de variables en modelos de dinámica de poblaciones

Rafael Bravo de la Parra

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Alcalá  
28871 Alcalá de Henares, Madrid

E-MAIL: rafael.bravo@uah.es

WWW: [http://www2.uah.es/rafael\\_bravo/](http://www2.uah.es/rafael_bravo/)

En la construcción y estudio de modelos matemáticos en las ciencias de la vida se presentan numerosos ejemplos de sistemas de gran complejidad por el gran número de variables necesarias para representarlos. Una forma natural de comenzar a tratarlos es intentar reducir su dimensión de manera que se facilite el uso de las técnicas analíticas disponibles. En el campo de la ecología estas técnicas de reducción se introdujeron de forma general en dos trabajos [1]-[2]. En el segundo de ellos se presenta la llamada agregación aproximada. Ésta consiste en construir, a partir del sistema complejo inicial, un sistema reducido para un pequeño número de variables, denominadas globales, cuya dinámica es aproximadamente coherente en ambos sistemas.

La agregación aproximada se puede llevar a cabo, en particular, cuando en el sistema inicial se pueden distinguir varias escalas de tiempo. La filosofía y posibles aplicaciones de ello se introdujeron en [3]. Cuando en un sistema se incluyen varios procesos que se desarrollan en diferentes escalas de tiempo, la manera habitual de reducirlo es considerar que el proceso que actúa en la escala más rápida es instantáneo con respecto a los más lentos, lo que hace disminuir el número de variables o parámetros que se necesitan para describir su evolución. Desde el punto de vista de la formalización matemática la tarea a emprender es la justificación de que se puede recuperar el comportamiento de las soluciones del sistema original a partir de los resultados obtenidos en el sistema reducido. El tipo general de enunciados relacionando ambos sistemas dice que cuanto mayor es la razón entre las escalas de tiempo mejor será la aproximación obtenida. Un primer trabajo en el que se lleva a cabo este programa en un sistema de e.d.o. es [4], donde se utilizan técnicas de variedades invariantes para sistemas dinámicos. A partir de entonces las técnicas de agregación de variables se desarrollaron también para ciertos sistemas discretos, tanto deterministas como estocásticos, así como para algunos sistemas continuos en dimensión infinita. Una primera revisión de estos métodos apareció en [5] y está en prensa una puesta al día [6]. En la charla se presentarán los resultados fundamentales de la agregación de variables para sistemas no lineales de e.d.o. y de ecuaciones en diferencias junto con algunas aplicaciones en modelos de dinámica de poblaciones, [7]-[8]-[9]-[10].

## Bibliografía

- [1] Y. Iwasa, V. Andreassen y S.A. Levin, *Aggregation in model ecosystems I. Perfect aggregation*, *Ecological Modelling*, **37**, 287–302 (1987).
- [2] Y. Iwasa, S.A. Levin y V. Andreassen, *Aggregation in model ecosystems II. Approximate aggregation*, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, **6**, 1–23 (1987).

- [3] P. Auger, *Dynamics and thermodynamics in hierarchically organized systems*, Pergamon Press, Oxford, (1989).
- [4] P. Auger y R. Bravo de la Parra, *Complex ecological models with simple dynamics: From individuals to populations*, *Acta Biotheoretica*, **42**, 111–136 (1994).
- [5] P. Auger y R. Roussarie, *Methods of aggregation of variables in population dynamics*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la vie*, **323**, 665–674 (2000).
- [6] P. Auger, R. Bravo de la Parra, J.C. Poggiale, E. Sánchez y T. Nguyen Huu, *Aggregation of variables and applications to population dynamics*, en: P. Magal y S. Ruan (Eds.), *Structured Population Models in Biology and Epidemiology*, Springer, (en prensa).
- [7] C. Lett, P. Auger y R. Bravo de la Parra, *Migration Frequency and the Persistence of Host-Parasitoid Interactions*, *Journal of Theoretical Biology* **221**, 639–654 (2003).
- [8] P. Auger, B.W. Kooi, R. Bravo de la Parra y J.C. Poggiale, *Bifurcation analysis of a predator-prey model with predators using hawk and dove tactics*, *Journal of Theoretical Biology*, **238**, 587–607 (2006).
- [9] A. El Abdllaoui, P. Auger, B.W. Kooi, R. Bravo de la Parra y R. Mchich, *Effects of density-dependent migrations on stability of a two-patch predator-prey model*, *Mathematical Biosciences*, (disponible en línea).
- [10] L. Sanz, R. Bravo de la Parra y E. Sánchez, *Approximate Reduction of Non-Linear Discrete Models with Two Time Scales*, *Journal of Difference Equations and Applications*, (revisado).

---

## Aplicaciones de los códigos de Gray a la criptografía caótica

Gonzalo Álvarez Marañón

Dept. Tratamiento de la Información y Codificación  
Instituto de Física Aplicada  
Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
Serrano, 144 - 28006 Madrid

E-MAIL: gonzalo@iec.csic.es

WWW: <http://www.iec.csic.es/gonzalo/>

COLABORADORES: David Arroyo Guardado (CSIC), Juana Núñez García (CSIC)

El uso de los códigos de Gray está muy extendido en ingeniería, telecomunicaciones, genética e incluso acertijos matemáticos. El código de Gray es un sistema binario en el que dos valores sucesivos difieren sólo en un bit. En [1] se tradujo la teoría de secuencias simbólicas de mapas cuadráticos unidimensionales a la teoría de números gracias a los códigos de Gray. Se demostró cómo las secuencias están ordenadas según código de Gray tanto para un valor del parámetro dado y distintos valores del punto inicial como para un valor inicial dado y distintos valores del parámetro. El código de Gray se generalizó para incluir el Número de Orden de Gray (GON) en el intervalo (0,1), que permite el ordenamiento simultáneo de secuencias simbólicas de distinta longitud.

En [2] se aplicaron los códigos de Gray al criptoanálisis del criptosistema de Baptista [3], donde las claves consisten en la pareja {parámetro,punto inicial}, demostrándose

cómo a partir del conocimiento de la secuencia simbólica y bien del valor del parámetro o del punto inicial podía obtenerse el resto de la clave.

Posteriormente, este trabajo fue llevado más allá para ciertas condiciones especiales por [4], de manera que a partir del conocimiento de la secuencia simbólica es posible determinar tanto el valor del parámetro como del punto inicial.

Se terminará repasando las consecuencias que los códigos de Gray y el número GON tienen en el diseño de nuevos criptosistemas caóticos basados en la propiedad de ergodicidad de los sistemas dinámicos no lineales.

## Bibliografía

- [1] S.J. MayBe, G. Alvarez, M. Romera, G. Pastor, and F. Montoya, *Electronics Letters*, **34**, 1304-1306 (1998).
- [2] G. Alvarez, F. Montoya, M. Romera, and G. Pastor, *Phys Let A*, **311**, 172-179 (2003).
- [3] M.S. Baptista, *Phys. Lett. A*, **240**, 50-54 (1998).
- [4] X. Wu, H. Hu, and B. Zhang, *Chaos, Solitons & Fractals* **22**, 359-366, (2004).

---

## Modelado matemático de fenómenos termoconvectivos en huracanes

Henar Herrero

*Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias Químicas e Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería*

*Universidad de Castilla-La Mancha  
13071 Ciudad Real*

E-MAIL: [Henar.Herrero@uclm.es](mailto:Henar.Herrero@uclm.es)

WWW: <http://matematicas.uclm.es/qui-cr>

COLABORADORES: M. Cruz Navarro (UCLM), Ana M. Mancho (CSIC)

Se observa en los últimos años un aumento de la intensidad y amplitud de los huracanes. Esto puede ser debido a un aumento en la temperatura del océano por el efecto invernadero [1]. Los huracanes son un fenómeno complejo, del que no se conoce bien su génesis. Uno de los elementos fundamentales en su formación es la convección térmica. Queremos estudiar hasta que punto es importante la convección térmica en la formación de huracanes, es decir, si un modelo exclusivamente termoconvectivo podría explicar el fenómeno. Para ello planteamos un modelo de pluma térmica como hipótesis. Lo que observamos es que, aunque los fenómenos termoconvectivos son fundamentales, parece imprescindible el término de Coriolis para que se origine rotación [2].

## Bibliografía

- [1] K. Emanuel, *Divine Wind. The History and Science of Hurricanes*, Oxford University Press, 2005.
- [2] M.C. Navarro, A.M. Mancho and H. Herrero, *Instabilities in buoyant flows under localized heating*, *Chaos* **17**, 0230105 (2007).

---

## Cálculo de variedades invariantes normalmente hiperbólicas con aplicaciones en misiones espaciales

Josep J. Masdemont

*Dept. Matemàtica Aplicada I*

*Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)*

*Diagonal 647*

*08028 Barcelona.*

E-MAIL: [josep@barquins.upc.es](mailto:josep@barquins.upc.es)

WWW: <http://www-ma1.upc.es/personal/masdemon.html>

COLABORADORES: E. Canalias, A. Delshams, M. Gidea, P. Roldan

Las variedades invariantes de las órbitas de libración colineales en el problema restringido de tres cuerpos nos dan la estructura fundamental para entender los fenómenos de transporte desde un punto de vista geométrico. En particular, las variedades hiperbólicas nos proporcionan tubos por los cuales se realiza el transporte de material entre distintos regímenes. Estos tubos pueden ser usados para analizar determinados movimientos naturales en el sistema solar, así como para construir trayectorias de baja energía como el *Petit Grand Tour* de las lunas de Jupiter o bien el diseño de la misión espacial Génesis.

En la presentación haremos una introducción al problema restringido de tres cuerpos, a los puntos de libración colineales y a un estudio local de su entorno. Describiremos el papel de las variedades invariantes asociadas a las órbitas de la variedad central y su actuación como de separatrices del movimiento. Seguidamente analizaremos distintas técnicas semianalíticas de cálculo de variedades invariantes. Para el caso de las órbitas de Lissajous no-lineales y sus variedades invariantes asociadas, nos centraremos en la obtención de expansiones del tipo Lindstedt-Poincaré. También veremos brevemente como se pueden obtener las variedades invariantes mediante técnicas de forma normal y de reducción a la variedad central y estudiaremos la relación entre el desarrollo de Lindstedt y la forma normal de Birkhoff.

Una vez disponemos de las herramientas desarrolladas trataremos algunas de sus aplicaciones. En la presentación nos centraremos en una metodología de cálculo de órbitas homoclínicas y heteroclínicas entre órbitas de libración, en base de estudiar las intersecciones de las variedades invariantes obtenidas a partir de la integración de las condiciones iniciales dadas por los desarrollos de Lindstedt o de Forma Normal.

Teniendo en cuenta las aplicaciones astrodinámicas, una manera interesante de clasificar dichas trayectorias es por el número de vueltas que dan alrededor del primario menor. Por ello es conveniente localizar una sección de Poincaré en la posición del primario menor y estudiar los distintos cortes de las variedades con dicha sección. El número mínimo de vueltas varía en función de la energía y la cantidad y calidad de las trayectorias de conexión esta ligada a la aparición de ellas mismas.

Finalizaremos la presentación con estudios de transferencias entre el sistema Tierra-Luna y el Tierra-Sol.

---



# COMUNICACIONES ORALES



---

## Sesión 1: Redes sociales

Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)

Moderadora: Susanna C. Manrubia

---

### El triángulo del crimen: un modelo dinámico para controlar la población criminal

Juan Carlos Nuño

*Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales*

*ETSI de Montes*

*Universidad Politécnica de Madrid*

*28030, Madrid*

E-MAIL: [juancarlos.nuno@upm.es](mailto:juancarlos.nuno@upm.es)

COLABORADORES: Miguel Angel Herrero (Universidad Complutense de Madrid), Mario Primicerio (Università degli studi di Firenze)

Una cuestión de gran importancia para las autoridades que combaten el crimen se refiere al número de efectivos policiales que, en cada momento, deben estar disponibles. Una solución simple supone que la dimensión de la policía está directamente relacionada con el número de delitos que se cometen. No obstante, el mantenimiento de una policía sobredimensionada resta unos recursos a la comunidad que no tienen porque compensar el servicio que genera en la prevención del delito. Por tanto, el ajuste dinámico entre los efectivos y el número de delitos debería ser óptimo.

Esta sincronización está íntimamente relacionada con la eficacia de la policía en la lucha contra el crimen. Obviamente, una alta eficacia requiere de menos agentes para controlar la población criminal (que está funcionalmente relacionada con el número de delitos que se comenten). Sin embargo, poco se conoce sobre la respuesta de este tipo de sistemas a variaciones en la eficacia policial.

En este trabajo se presenta un modelo de poblaciones en el que propietarios, criminales y policías coexisten y evolucionan con el tiempo. El modelo recuerda los sistemas ecológicos multinivel, pero a diferencia de éstos, la función crecimiento de la especie depredadora que se encuentra en el nivel superior, los guardias, depende exclusivamente de la tasa de crecimiento, relacionada con los delitos que se comenten, de la especie del nivel inferior, los criminales. La eficacia de la policía en su lucha contra los delincuentes es elegida como parámetro de estudio, dejando el resto de los parámetros fijados a un estado de referencia.

El análisis de bifurcación de este sistema dinámico descubre una rica variedad de comportamientos que incluye tanto bifurcaciones de puntos fijos como de ciclos límite. El estudio se complementa con la discusión de la relevancia de estos resultados para la Criminología teórica. Así mismo, se resalta la necesidad de contar con un acceso a los datos empíricos que manejan las autoridades encargadas de controlar el crimen.

---

### Redes de la Yihad: Estudio comparativo del 11S y del 11M desde el punto de vista de las Redes Complejas

Juan José Miralles Canals

*Grupo de Investigación Interdisciplinar en Sistemas Dinámicos (GI<sup>2</sup>SD)*

*Escuela Politécnica Superior de Albacete (EPSA)*

*UCLM*

*02071 - Avenida de España s/n, Albacete*

E-MAIL: [juan.miralles@uclm.es](mailto:juan.miralles@uclm.es)

WWW: <http://www.poincare.pol-ab.uclm.es>

El paradigma de las Redes Complejas ha cambiado la forma de aproximarse, en diversas ramas de la ciencia, al tratamiento de los fenómenos colectivos. En particular el fenómeno de las redes terroristas, permite una aproximación al estudio del mismo desde el punto de vista de las redes complejas.

Se presenta un trabajo de investigación en progreso, cuya primera versión fue presentada como comunicación oral en el IV Seminario de Análisis Social de Redes, celebrado en Diciembre de 2006 en Sevilla, y en el curso de Postgrado sobre EconoSociofísica, celebrado en Barcelona en Febrero de 2007.

El trabajo muestra la red del 11M, implementada a partir de información pública. Se compara con trabajos previos sobre la red del 11M y del 11S. Se calcula la distribución de grados de la red del 11S y del 11M y se analiza el tipo de ajuste. Por último, se estima la entropía de las redes del 11M y del 11S, de manera análoga a como se hace en las redes de biología y se discute el resultado en relación con el concepto de Red Yihadista.

## Bibliografía

- [1] S. Galam, *The September 11 Attack: A Percolation of Individual Passive Support*, Eur. Phys. J. B **26**, 269–272 (2002).
  - [2] M. Newman, *Assortative mixing in networks*, Physical Review Letters **89**, 208701–208705 (2002).
  - [3] V. Krebs, *Mapping Networks of Terrorist Cells*, Connections **24**, 43–52 (2002).
  - [4] J.A. Rodríguez, *La Red Terrorista del 11M*, VIII Congreso Español de Sociología, Alicante (2004).
  - [5] R. V. Sole, S. Valverde, *Information Theory of Complex Networks: On Evolution and Architectural Constraints*, Lecture Notes in Physics **650**, 189–207 (2004).
  - [6] S. Galam, *Global terrorism versus social permeability to underground activities. Econophysics and Sociophysics Trends and Perspectives*, Chakrabarti, Bikas K. / Chakraborti, Anirban / Chatterjee, Arnab (eds.), 393–416 (2006).
  - [7] J.J. Miralles, J. Núñez, *Implementación de la red del 11-M y su comparación con la red del 11-S*, IV Seminario para el análisis de redes sociales. Sevilla (2006).
-

## Dinámica Evolutiva de la Cooperación en Redes Complejas

Julia Poncela

BIFI. Universidad de Zaragoza

Corona de Aragón, 42. Edificio Cervantes  
50009 Zaragoza

E-MAIL: 485649@unizar.es

WWW: <http://bifi.unizar.es>

COLABORADORES: J. Gómez-Gardeñes, L.M. Floría, Y. Moreno

Con el objetivo de entender la supervivencia de la cooperación en comunidades sociales cuando las acciones egoístas son más rentables, se ha invertido un gran esfuerzo en el análisis de la dinámica evolutiva de juegos sencillos de dos jugadores, como el llamado “dilema del prisionero”. En este juego, los jugadores adoptan una de las dos estrategias posibles, cooperación o desertión; ambos reciben un beneficio  $R$  si cooperan,  $P$  si desertan, mientras que el desertor recibe  $T$  al jugar con un cooperador, recibiendo éste último  $S$ , siendo  $T > R > P > S$ . Bajo estas condiciones es más rentable desertar independientemente de la estrategia contraria, y suponiendo que las estrategias prosperan de acuerdo a su beneficio (dinámica replicador) la proporción de cooperadores en la población tiende a anularse en una población “bien mezclada”. Si se abandona esta última hipótesis, de modo que los jugadores sólo interactúan con sus vecinos en una red social, diversos estudios han mostrado que la cooperación sobrevive. Más aún, cuando la estructura de conexiones en la red es altamente heterogénea la cooperación es incluso predominante sobre la estrategia contraria [1].

En esta contribución mostraremos un análisis comparativo detallado de la dinámica evolutiva del dilema del prisionero sobre grafos aleatorios Erdős-Renyi (homogéneos) y Barabási-Albert (libres de escala). Los estados asintóticos muestran genéricamente una partición de la red en tres conjuntos de nodos [2]: cooperadores puros, desertores puros, y nodos fluctuantes (que alternan estrategias en el tiempo). Mientras en grafos ER tanto los cooperadores como los defectores puros aparecen agrupados en varios *clusters* (componentes conexas), en los grafos libres de escala los cooperadores puros siempre forman un solo cluster, conteniendo los nodos de mayor conectividad (hubs). Nuestros resultados muestran que la organización de la cooperación en redes complejas depende fuertemente de las características topológicas del grafo subyacente y permiten entender porqué la cooperación resulta favorecida en grafos libres de escala.

## Bibliografía

- [1] F.C. Santos and J.M. Pacheco *Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation*, Phys. Rev. Lett. **95**, 098104(1-4) (2005).
- [2] J. Gómez-Gardeñes *et al.* *Dynamical Organization of Cooperation in Complex Topologies*, Phys. Rev. Lett. (2007) en prensa.

## Sesión 2: Mecánica celeste

Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)

Moderada: Josep Masdemont

### Estudio cualitativo del problema del anillo de $(N + 1)$ cuerpos

Fernando Blesa

GME, Depto. Física Aplicada,  
Universidad de Zaragoza,  
E-50009 Zaragoza, Spain

E-MAIL: [fblesa@unizar.es](mailto:fblesa@unizar.es)

WWW: <http://gme.unizar.es>

COLABORADORES: R. Barrio (Universidad de Zaragoza), S. Serrano (Universidad de Zaragoza)

En la presente comunicación presentamos un estudio cualitativo [2] del problema del anillo de  $(N + 1)$  cuerpos [5], el cual es un caso simplificado del problema de  $N$  cuerpos. En concreto, describimos la evolución de los puntos de equilibrio según cambia la constante de Jacobi, su estabilidad y bifurcaciones. Por otro lado estudiamos la caoticidad del sistema y el tipo de órbitas utilizando un indicador de caos, OFLI2 [2], y el *Crash test* de Nagler [4]. Por último, una vez localizadas las zonas con comportamiento caótico calculamos el *esqueleto* de órbitas periódicas simétricas [3] del sistema.

## Bibliografía

- [1] R.Barrio, *Painting chaos: a gallery of sensitivity plots of classical problems*, Internat. J. Bifur. Chaos **16** (10), 2777–2798 (2006).
- [2] R.Barrio, F.Blesa, S.Serrano, *Qualitative analysis of the  $(N + 1)$ -body ring problem*, Chaos Solitons Fractals (in press) (2007).
- [3] R.Barrio, F.Blesa, *Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems*, Preprint (2007).
- [4] J.Nagler, *Crash test for the restricted three-body problem*, Phys. Rev. E (3) **71** (2), 026227, 11 pages (2005).
- [5] D.J. Scheeres, N.X. Vinh, *The restricted  $p + 2$  body problem*, Acta Astron. **29** (4), 237–248 (1993).

### Comportamiento asintótico del parámetro de estabilidad para una familia de ecuaciones de Hill

Anna Samà Camí

Departament de Matemàtiques  
Facultat de Ciències

Universitat Autònoma de Barcelona  
08193 Cerdanyola (Barcelona)

E-MAIL: [sama@mat.uab.cat](mailto:sama@mat.uab.cat)

Consideramos la familia de ecuaciones de Hill

$$\ddot{x} - (\lambda_1 + \lambda_2 g^{\alpha-2})x = 0, \quad (1)$$



donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 2)$  y  $g(t; \delta)$  es una función periódica en  $t$  que depende de un parámetro  $\delta \in (0, \delta_0]$  con  $\delta_0$  suficientemente pequeño,  $g(t; \delta) > 0$  para todo  $t$  y  $g(0; \delta) \rightarrow 0$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ . En esta situación la ecuación (1) tiene una singularidad en  $t = 0$  para  $\delta = 0$ .

Bajo la hipótesis de que  $g$  es solución de determinado sistema conservativo, estudiamos el parámetro de estabilidad para valores pequeños de  $\delta > 0$ . Para ello, usamos una técnica de blow-up para estudiar el caso límite cuando  $\delta$  tiende a cero como un sistema lineal sobre una conexión heteroclínica.

### Técnicas de matching complejo en la ecuación de Hamilton-Jacobi

Carme Olivé  
*Dpt d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques*  
*Universitat Rovira i Virgili*  
*Avda Països Catalans 26*  
*43007 - Tarragona*

E-MAIL: carme.olive@urv.cat

COLABORADORES: Tere M. Seara (Universitat Politècnica de Catalunya)

El sistema del péndulo con una perturbación rápidamente oscilante no necesariamente pequeña se comporta como cercano a un integrable, en el sentido que las zonas caóticas son exponencialmente pequeñas respecto del periodo de la perturbación. Consideraremos la función de Hamilton asociada

$$H_{\mu,\varepsilon}(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - 1 + \cos q + \mu(1 - \cos q) \sin(t/\varepsilon)$$

con  $0 < \varepsilon < 1$  pero  $\mu$  no necesariamente pequeño. Cuando  $\mu \neq 0$  las separatrices del punto fijo hiperbólico se rompen, dando lugar a variedades invariantes bidimensionales estable e inestable asociadas a una órbita  $2\pi\varepsilon$ -periódica hiperbólica. La distancia entre estas variedades permite tener una idea de la magnitud de las zonas caóticas del sistema.

Estas variedades bidimensionales pueden representarse como grafos de diferenciales  $p = \partial_q S^\pm(q, t, \mu, \varepsilon)$ , donde  $S^+$  y  $S^-$  son funciones  $2\pi\varepsilon$ -periódicas en  $t$  y analíticas, y satisfacen la ecuación en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t S + H_{\mu,\varepsilon}(q, \partial_q S, t) = 0$$

con condiciones asintóticas  $\lim_{q \rightarrow 0, 2\pi} \partial_q S^\mp(q, t, \mu, \varepsilon) = 0$  (véase [1]).

Las funciones  $S^\pm$  deben ser aproximadas por diferentes expresiones dependiendo del dominio complejo de  $q$ , y la diferencia entre ellas cerca de las singularidades de las separatrices se ha estudiado vía la teoría de la resurgencia (véase [2]). Por otro lado será importante considerar el hecho de que la diferencia  $S^+ - S^-$  se anula bajo el campo

$$\partial_t + \frac{1}{2}(\partial_q S^+ + \partial_q S^-)\partial_q. \quad (1)$$

A partir de toda la información obtenida de las funciones  $S^\pm$ , y usando técnicas de matching complejo, se consigue una cota de  $S^+ - S^-$  en una cierta banda compleja vertical y un cambio de variables que conjuga el campo (1) con el de coeficientes constantes  $\partial_t + \partial_q$ . Estos resultados permitirán obtener en el dominio real una fórmula

exponencialmente pequeña en  $\varepsilon$  para la distancia entre variedades invariantes [3].

Si  $\mu = \varepsilon^p$ , nuestros resultados confirman el término dominante de la distancia entre variedades que prevé el método clásico perturbativo de Poincaré-Melnikov para  $0 < p < 2$ . En cualquier caso, obtenemos una fórmula asintótica de esta distancia para  $\varepsilon$  pequeño, con el parámetro  $\mu$  independiente de  $\varepsilon$ .

### Bibliografía

- [1] P. Lochak, J.-P. Marco and D. Sauzin. *On the Splitting of Invariant Manifolds in Multidimensional Near-Integrable Hamiltonian Systems*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **163** (775), viii+145pp (2003).
- [2] C. Olivé, D. Sauzin and T. M. Seara. *Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation*, *Ann. Inst. Fourier* **53**, 1185-1235 (2003).
- [3] C. Olivé. *Cálculo de la escisión de separatrices usando técnicas de matching complejo y resurgencia aplicadas a la ecuación de Hamilton-Jacobi*, tesis doctoral (2006).

### Sesión 3: Métodos numéricos

Miércoles 6 de Junio (11:30–12:30)

Moderador: Pedro Fernández de Córdoba

#### Un método iterativo para la resolución de EDP con condiciones de contorno no lineales

José Román Galo Sánchez  
*Universidad de Córdoba*  
*Dpto. de Informática y Análisis Numérico,*  
*Campus de Rabanales, Ed. Einstein, Planta 3*  
*Córdoba, 14071*

E-MAIL: ma1gasaj@uco.es

La resolución numérica de problemas modelados por Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) suele alcanzar su mayor simplicidad cuando las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, pero frecuentemente las condiciones más naturales son bien de tipo Neumann, Robbins, no lineales o mixtas en general. En particular, las condiciones no lineales suelen ser comunes en diversos ámbitos del conocimiento como en problemas de mecánica de fluidos, oceanografía, evolución de playas, construcción naval, hidrogeología, aleaciones, control, mecánica estructural, mecánica de sólidos, problemas de contacto, fricción, conducción térmica, reacción-difusión, e incluso en aplicaciones médicas como la conservación de órganos en frío.

En este trabajo se detalla el análisis de la convergencia de un método iterativo para la resolución de EDP, que independientemente de las condiciones de contorno impuestas, reduce ésta sólo a condiciones tipo Dirichlet.

Un planteamiento inicial, que podría considerarse como base conceptual para el método iterativo aquí estudiado, sería el siguiente: efectuada una discretización espacial del dominio de definición del problema y conocida una aproximación de la solución en los nodos interiores,

se realizarían dos pasos en cada iteración. El primero consiste en la prolongación de dicha aproximación a los nodos frontera imponiendo que se verifiquen las condiciones de contorno establecidas. En el segundo, se aborda la resolución de un problema, análogo al inicial, pero fijando condiciones Dirichlet con los valores obtenidos en la prolongación calculada. Consecuentemente, la resolución del problema original comprendería la resolución de una sucesión de problemas del mismo tipo, pero todos únicamente con condiciones Dirichlet. Con este esquema la viabilidad práctica computacional del método está condicionada a la disponibilidad de un método rápido de resolución para dichos problemas Dirichlet, ya que en principio habría que resolver un elevado número de ellos.

En esta comunicación se estudia una modificación del planteamiento anterior, donde el método iterativo sería el correspondiente al de resolución de un único problema, análogo al de partida, con condiciones sólo Dirichlet, pero aquí éstas condiciones van variando en cada iteración. Los valores que se imponen en la frontera son actualizados, en cada paso del método iterativo, con los que se calculan mediante la prolongación a los nodos frontera según el modo antes indicado. En particular, se analiza y se efectúa la demostración de la convergencia de este método en problemas elípticos tipo Helmholtz, mediante la aplicación de la teoría de “splitting” matricial regular [4]. También se detalla cómo influye el orden de la aproximación considerada en el paso de prolongación sobre la frontera. Se incluyen experiencias numéricas que muestran lo analizado.

Este método iterativo ha sido integrado, con éxito, en la resolución de problemas de Helmholtz con condiciones mixtas, los cuales actuaban como preconditionadores en un algoritmo para la resolución de las ecuaciones de Navier–Stokes según se detalla en [1] y [2], y en la resolución de la ecuación de Laplace con condiciones no lineales en un problema de distribución térmica en un cátodo de arco-plasma [3].

## Bibliografía

- [1] I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, J.R. Galo, M. Marín. *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*, Comput. and Appl. Math. Vol. 24, No. 3, 1-22 (2005).
- [2] J.R. Galo, I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, M. Marín, *Un esquema paralelo en tiempo y espacio para la resolución de problemas en Mecánica de Fluidos*, Nolineal 2004, Toledo (2004).
- [3] E. Muñoz, *Estudio del comportamiento físico de los cátodos de arco-plasmas a presión atmosférica*, Tesis, Universidad de Córdoba (2005).
- [4] R.S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Springer–Verlag, New York (2000).

## Sobre una clase de interpolaciones de Hermite no lineales

Sergio Amat

*Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
U.P. Cartagena  
Paseo Alfonso XIII, 52  
30203 Cartagena (Murcia)*

E-MAIL: [sergio.amat.es](mailto:sergio.amat.es)

WWW: <http://www.demae.upct.es>

COLABORADORES: María Moncayo (U.P. Cartagena) y J.Carlos Trillo (U.P. Cartagena)

En el procesado de señales una herramienta básica son los esquemas de multiresolución.

En este trabajo, mediante técnicas no lineales se introduce una forma de aproximar con orden arbitrario derivadas a partir de datos puntuales de la función. Estas derivadas se aplican para construir una multiresolución vectorial tipo Hermite de la señal. Resulta crucial la forma de aproximar las derivadas a la hora de tener unos algoritmos eficientes. Se comparara con técnicas lineales clásicas [5] y con otras técnicas no lineales [3].

Los ingredientes básicos para la reconstrucción que proponemos son interpolaciones no lineales del estilo a las presentadas en [2] pero usando otro tipo de medias para adaptarnos a las discontinuidades manteniendo órdenes altos en zonas de regularidad [4].

Este trabajo, es una generalización de [1] donde se presentaba el caso particular de orden cuatro.

## Bibliografía

- [1] I. Ali, S. Amat and J. C.Trillo, *Point values Hermite multiresolution for non-smooth noisy signals*, Computing **77**, 223–236 (2006).
- [2] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat and J. C. Trillo, *Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing*, Foundations of Computational Mathematics, **6**, 193–225 (2006).
- [3] F. Aràndiga, A. Baeza and R. Donat, *Discrete multiresolution based on Hermite interpolation: computing derivatives. Recent advances in computational and mathematical methods for science and engineering*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, **9** 263–273 (2004).
- [4] S.Serna and A. Marquina, *P-power ENO scheme for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics **194**, 632-658 (2004).
- [5] R. Warming, R. Beam, *Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelet's*, SIAM J. Sci. Comp. **22**, 1269-1317 (2000).

**Von Neumann type Stability Analysis for a Scheme approximating Fractional Evolution-Diffusion Equations**

Teresa Pierantozzi  
*Universidad Complutense de Madrid*  
*Facultad de Matemática*  
*Dep. de Matemática Aplicada*  
*28040 - Madrid, España*

E-MAIL: [teresa-pierantozzi@mat.ucm.es](mailto:teresa-pierantozzi@mat.ucm.es)

Fractional Evolution Equations Dirac like result from employing the tool of the Fractional Calculus and following the method used by Dirac to obtain his well-known equation from the Klein-Gordon one. They represent a possible interpolation between the Dirac and the diffusion equations in one space dimension, as they are written as follows:

$$(AD_t^\alpha + \lambda B \partial_x) \psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

with  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$  and where  $A$  and  $B$  are  $2 \times 2$  matrixes satisfying Pauli's algebra:

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad AB + BA = 0,$$

being  $I$  the identity operator. The operator  $D_t^\alpha$ , where  $\alpha > 0$ , is a fractional partial derivative in time coinciding with classical derivatives for integer orders  $\alpha$ .

After showing a relevant property of general solutions of this system of equations, necessary stability bounds for a numerical scheme approximating them are found through the discrete Von Neumann type analysis.

The non local property of the time fractional differential operator leads to very complex discretizations of this derivative and, as a consequence, the analytical methods usually employed in the study of the stability of discrete schemes when dealing with differential equations of integer order become highly heavy-going for the non integer case.

**Bibliografía**

[1] K. Diethelm, *An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order*, *Elect. Transact. Numer. Anal.* **5**, 1–6 (1997).  
 [2] A.A. Kilbas, T. Pierantozzi, J. Trujillo, L. Vázquez, *On the solution of fractional evolution equations*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 3271–3283 (2004).  
 [3] F. Mainardi, *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation*, *Waves and Stability in Continuous Media*, Bologna, 1993, 246–251, Ser. Adv. Math. Appl. Sci. **n. 23** (1994).  
 [4] K.B. Oldham, J. Spanier, *The replacement of Fick's law by a formulation involving semidifferentiation*, *J. Electroanalyt. Chem.* **26**, 331–341 (1970).  
 [5] T. Pierantozzi, L. Vázquez, *An interpolation between the Wave and Diffusion equations through the Fractional Evolution equations Dirac like*, *J. Math. Phys.* **46**, 113512–113523 (2005).  
 [6] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon (1993).

[7] W.R. Schneider, W. Wyss, *Fractional diffusion and wave equations*, *J. Math. Phys.* **30**, 134–144 (1989).  
 [8] J.N. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Method*, Texts in Applied Mathematics **22**, Springer-Verlag, New York (1995).  
 [9] L. Vázquez, *Fractional diffusion equation with internal degrees of freedom*, *J. Comp. Math.* **21**, 491–494 (2003).  
 [10] L. Vázquez, R. Vilela Mendes, *Fractionally coupled solutions of the diffusion equation*, *Appl. Math. Comp.* **141**, 125–130 (2003).

**Sesión 4: Mecánica de fluidos**

Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)

Modera: Henar Herrero

**Flujos de materia auto-semejantes en astrofísica**

Jose Gaité  
*IDR/UPM, ETSI Aeronauticos,*  
*Universidad Politecnica de Madrid,*  
*Pza. Cardinal Cisneros 3,*  
*28040 Madrid, Spain.*

E-MAIL: [jose.gaite@upm.es](mailto:jose.gaite@upm.es)  
 WWW: <http://www.imaff.csic.es/pcc/Gaite/>

La dinámica gravitatoria, en general, y los fenómenos de acrecimiento gravitatorio, en particular, son de gran importancia en astrofísica. Dado que dan lugar a problemas de mecánica no lineal, su tratamiento analítico es difícil. Sin embargo, la simetría de escala propia de la gravedad (que no tiene escala intrínseca asociada) facilita el tratamiento analítico. En los fenómenos de acrecimiento o colapso gravitatorio, esa simetría se manifiesta como algún tipo de auto-semejanza en su distribución y evolución.

En los flujos de acrecimiento, la dinámica está regida por la presencia de un cuerpo central compacto y de gran masa (una estrella o agujero negro), que es el cuerpo que acrece (“accretor”). Es razonable, pues, imponer simetría esférica respecto del cuerpo central. La simetría respecto de homotecias centradas en el cuerpo permite el tratamiento analítico.

Hemos encontrado soluciones analíticas de las ecuaciones del flujo de acrecimiento no estacionario sobre un objeto compacto sólido (p.e., una estrella de neutrones) y hemos descrito como se forma una onda de choque en el proceso [1]. Además, el flujo desarrolla un régimen auto-semejante, cuya descripción se reduce a una ecuación diferencial ordinaria que permite dar una imagen global del flujo. El flujo evoluciona hacia un estado estático, que proporciona la masa total acrecida y su distribución final.

Otra situación interesante es la de flujo estacionario, estudiada por Bondi. Hemos estudiado las perturbaciones del flujo de Bondi auto-semejante y demostrado su estabilidad (en forma de evolución cuasi-ergódica) [2].

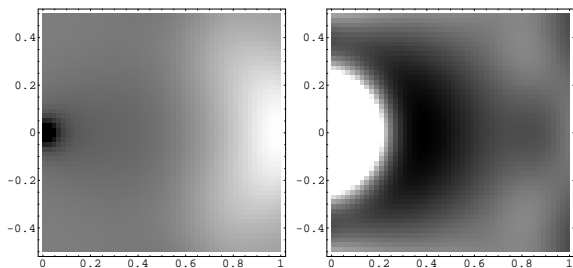


Fig. 1: Evolución de una perturbación de la densidad en el flujo de Bondi auto-semejante.

## Bibliografía

- [1] J. Gaité, *Analytic solutions for spherical gravitational gas accretion on to a solid body*, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **340**, 832–840 (2003); J. Gaité y M.P. Zorzano, *Nonlinear spherical gravitational downfall of gas onto a solid ball: analytic and numerical results*, Physica D **183**, 102–116 (2003).
- [2] J. Gaité, *Perturbations in the self-similar Bondi flow*, Astronomy and Astrophysics **449**, 861–868 (2006); J. Gaité, *Stability of Self-Similar Spherical Accretion*, Spanish Relativity Meeting (ERE) 2005, Editors L. Mornas and J. Diaz-Alonso, AIP Conference Proceedings, Vol. 841, 2006, pp. 433–436.

---

## Convección con rotación en cilindros: efectos centrífugos.

Francisco Marques  
 Dep. Física Aplicada  
 Universidad Politécnica de Cataluña  
 Campus Norte, mod. B5  
 08034 Barcelona, España

E-MAIL: [marques@fa.upc.edu](mailto:marques@fa.upc.edu)  
 WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa/fluids/marques/marques.html>

COLABORADORES: I. Mercader, O. Batiste, J.M. Lopez & A. Rubio.

La convección de Rayleigh-Bénard en rotación es un problema clásico de mecánica de fluidos en el que compiten la rotación y la fuerza de sustentación originada por diferencias de temperatura. Ambos procesos son de gran importancia tanto para la circulación planetaria atmosférica y oceánica, como en astrofísica. Las idealizaciones y simplificaciones en mecánica de fluidos han sido y continúan siendo muy útiles para comprender la dinámica de sistemas físicos. En particular, la convección con rotación fue analizada inicialmente suponiendo una capa infinita periódica, y despreciando el efecto de la sustentación centrífuga. El análisis de condiciones de contorno realistas, tanto desde el punto de vista teórico[3] como experimental[2], tuvo lugar en la década de los noventa, y mostró la aparición de un nuevo tipo de inestabilidad, ondas de rotación en la pared

lateral, resultado de la interacción de la fuerza de Coriolis con la pared. En el presente estudio incluimos por primera vez la sustentación centrífuga, y estudiamos su efecto sobre la dinámica, y sobre las sucesivas bifurcaciones que llevan del estado básico laminar a la complejidad espacio-temporal precursora de la turbulencia desarrollada, en un recinto cilíndrico de altura igual al radio. En particular presentamos los resultados del análisis del flujo básico axisimétrico[3], que presenta multiplicidad de estados como resultado de diversas bifurcaciones cuspidales, así como el análisis lineal de estabilidad de dichos estados básicos frente a perturbaciones arbitrarias, y el análisis de las soluciones bifurcadas. Las conclusiones más importantes[4] son que para números de Froude  $F \geq 0,5$  la dinámica cambia apreciablemente debido a los efectos centrífugos, siendo totalmente dominada por dichos efectos para  $F \geq 3,5$ , en la geometría estudiada. El efecto de la sustentación centrífuga se traduce en una tendencia a la axisimetrización de los flujos, y a la aparición de nuevas inestabilidades, en particular una inestabilidad de precesión de las plumas térmicas cerca del centro del dominio. La dinámica está dominada por bifurcaciones de codimensión dos tipo doble Hopf y fold-Hopf.

## Bibliografía

- [1] Goldstein, H. F., Knobloch, E., Mercader, I. & Net, M. *Convection in a rotating cylinder. Part 1. Linear theory for moderate Prandtl numbers*, J. Fluid Mech. **248**, 583–604 (1993).
- [2] Zhong, F., Ecke, R. & Steinberg, V. *Rotating Rayleigh-Bénard convection: asymmetric modes and vortex states*, J. Fluid Mech. **249**, 135–159 (1993).
- [3] J.M. Lopez, A. Rubio, F. Marques, *Traveling circular waves in axisymmetric rotating convection*, J. Fluid Mech. **569**, 331–348 (2006).
- [4] F. Marques, I. Mercader, O. Batiste, J.M. Lopez, *Centrifugal effects in rotating convection: Axisymmetric states and 3D instabilities*, J. Fluid Mech., accepted (2007).

---

## Inestabilidades en convección Rayleigh- Bénard bajo calentamiento localizado

María Cruz Navarro Lérica  
 Departamento de Matemáticas  
 Facultad de CC. Químicas  
 Universidad de Castilla- La Mancha (UCLM)  
 Ciudad Real

E-MAIL: [mariacruz.navarro@uclm.es](mailto:mariacruz.navarro@uclm.es)

COLABORADORES: Henar Herrero (UCLM), Ana María Mancho (CSIC)

Estudiamos desde un punto de vista numérico inestabilidades desarrolladas en un fluido contenido en un dominio cilíndrico calentado no homogéneamente por debajo. En particular, consideramos el caso en que el calor es localizado en torno al origen aproximándonos a una

pluma térmica. El estado básico que aparece cuando se establece un gradiente de temperatura horizontal no nulo puede bifurcar a diferentes soluciones dependiendo de los gradientes de temperatura vertical y horizontal y del perfil de la función de calentamiento. Encontramos diferentes tipos de inestabilidades: estructuras que se extienden por todo el dominio y que incluyen ‘targets’ y ondas espirales y estructuras localizadas en el origen o en la parte exterior del cilindro que pueden aparecer como bifurcaciones de Hopf o bifurcaciones estacionarias.

## Sesión 5: Biología molecular

Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Arcadi Navarro

### Detección composicional entrópica de estructuras de interés en secuencias de ADN

Juan Francisco Gómez Lopera  
 Departamento de Física Aplicada  
 Universidad de Granada  
 18071 - Granada, España

E-MAIL: [jfgomez@ugr.es](mailto:jfgomez@ugr.es)

COLABORADORES: José Martínez Aroza, Ramón Román Roldán, Pedro Luque Escamilla, José L. Oliver

La divergencia de Jensen-Shannon ( $JS$ ) es una medida de la disimilitud entre varias secuencias simbólicas. En el caso de dos secuencias de diferente tamaño, la divergencia se pondera con la longitud de cada una de ellas. Esta medida ha demostrado su utilidad en el contexto de la segmentación de secuencias de ADN [1, 2, 3], en especial en el diseño de algoritmos heurísticos de segmentación basados en la búsqueda de puntos donde la composición de la secuencia cambia (segmentación composicional).

En este trabajo se presenta un nuevo método de detección de objetos en secuencias simbólicas basado en un grupo de ventanas deslizantes que recorre completamente la secuencia, y que está compuesto por una ventana central de longitud  $L$  ( $v_c$ ) y dos ventanas laterales adyacentes a la anterior de tamaño  $L/2$  ( $v_1$  la izquierda y  $v_2$  la derecha). Para cada posición válida se calcula el factor discriminante  $K$ , definido como

$$K \equiv L \cdot [JS(v_1, v_c) \cdot JS(v_2, v_c) \cdot JS(v_1 + v_2, v_c)],$$

dónde

- $JS(v_1, v_c)$  y  $JS(v_2, v_c)$  son, respectivamente, la divergencia entre la ventana izquierda y la central, y la derecha y la central,
- $JS(v_1 + v_2, v_c)$  es la divergencia entre la secuencia compuesta por las ventanas izquierda y derecha conjuntamente frente a la central.

El factor discriminante  $K$  es mayor cuanto mayor sea la diferencia composicional de la ventana central respecto a las ventanas laterales individualmente y en su conjunto.

Se añade como factor multiplicativo el tamaño de la ventana central porque una misma diferencia de composición es más relevante cuanto mayor sea el tamaño de las muestras que se comparen (esto es, el tamaño de las ventanas). La secuencia se analiza calculando el factor discriminante para cada posición del grupo de ventanas, repitiendo el experimento para una serie de tamaños y obteniéndose como resultado una matriz de números reales. Un simple análisis (mediante umbralización, por ejemplo) de los datos obtenidos permite detectar las posiciones de la secuencia en las que, para un tamaño de ventana dado, hay objetos que se destacan composicionalmente del entorno. Experimentos sobre secuencias sintéticas y naturales han dado buenos resultados, mostrando una gran sensibilidad del método (el tamaño de las estructuras por detectar ha de ser muy cercano a la longitud de la ventana central). Esta característica es deseable si se pretende determinar con precisión el tamaño de las estructuras de interés en la secuencia de ADN: genes, elementos repetidos, islas CpG, etc.

## Bibliografía

- [1] R. Román-Roldán, P. Bernaola-Galván and J. L. Oliver. *Sequence compositional complexity of DNA through an entropic segmentation method*, Physical Review Letters **80** (1998) 1344-1347.
- [2] I. Grosse, P. Bernaola-Galván, P. Carpena, R. Román-Roldán, J. L. Oliver, and H. E. Stanley. *Analysis of symbolic sequences using the Jensen-Shannon divergence measure*, Physical Review E **65** (2002) 041905.
- [3] P.L. Luque-Escamilla P.L., J. Martínez Aroza, J.L. Oliver, J.F. Gómez-Lopera and R. Román-Roldán. *Compositional searching of CpG islands in the human genome*, Physical Review E **71** (2005) 061925.

### Propiedades colectivas de cuasiespecies en evolución molecular

Michael Stich  
 Centro de Astrobiología (INTA-CSIC),  
 Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial,  
 Ctra de Ajalvir, km 2,  
 28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)

E-MAIL: [stichm@inta.es](mailto:stichm@inta.es)

WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: Susanna C. Manrubia, Carlos Briones

Las moléculas de RNA representan, a través de su doble identidad de secuencia y estructura, un modelo apto para estudiar propiedades evolutivas de cuasiespecies (e.g., [1]). Un elemento esencial de este modelo es la diferenciación entre genotipo (secuencia molecular, afectado por mutación) y fenotipo (estructura molecular, afectado por selección). Este marco permite un análisis cualitativo de las propiedades organizativas de cuasiespecies adaptándose a entornos diferentes, como la robustez, el efecto de la degeneración del espacio de las secuencias o la adaptación bajo tasas variables de mutación y el umbral de error asociado.

Describimos y analizamos las propiedades estructurales de cuasiespecies moleculares adaptándose a entornos dife-

rentes en el régimen transitorio antes de la adaptación y en el estado asintótico [5]. Observamos un valor mínimo en el tiempo de adaptación a valores de tasa de mutación relativamente lejos del umbral de error. A través de la definición de la estructura consenso, se puede demostrar que la cuasiespecie retiene información relevante estructural de forma distribuida incluso por encima del umbral de error. Esta robustez estructural depende de la estructura secundaria concreta utilizada como objetivo de la selección.

## Bibliografía

- [1] S.C. Manrubia, C. Briones, *Motif selection and increase of complexity in evolving RNA populations*, *RNA* **13**, 97–107 (2007).
- [2] M. Stich, C. Briones, S.C. Manrubia, *Collective properties of evolving molecular quasispecies*, submitted.

---

## Dinámica de la vía de señalización del receptor de interferón tipo I

Jorge Elorza  
*Departamento de Física y Matemática Aplicada*  
*Facultad de Ciencias*  
*Universidad de Navarra*  
*31080 - Pamplona, Navarra*

E-MAIL: [jelorza@unav.es](mailto:jelorza@unav.es)  
 WWW: <http://www.unav.es>

COLABORADORES: Iván Martínez (Universidad de Navarra), Pablo Villoslada (Centro de Investigación Médica Aplicada-CIMA)

Los interferones son moléculas que participan en la respuesta a infecciones virales y en el control de la acción del sistema inmune. Existen dos familias de interferon (tipo I y tipo II) con funciones biológicas relacionadas. Debido a sus propiedades antivirales, antiproliferativas e inmunomoduladoras tienen especial interés terapéutico.

En este trabajo pretendemos explicar la dinámica de la vía de señalización del receptor de interferon tipo I.

Para ello, hemos construido un modelo computacional de las reacciones químicas desencadenadas por el interferon.

Las simulaciones del modelo sugieren, como conclusión, una distribución del control de la señal de activación en las tres ramas de la vía de señalización y, en segundo lugar, una posible activación de la apoptosis (muerte celular) contrarrestada por la activación de un mecanismo de supervivencia celular.

En un futuro próximo comprobaremos experimentalmente los resultados de las simulaciones.

---

## Sesión 6: Solitones espaciales I

Miércoles 6 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Germán de Valcárcel

---

## Nonlinear tunneling of BEC in an optical lattice: signatures of quantum collapse and revival

Vladimir V. Konotop

*Centro de Física Teórica e Computacional, Universidade de Lisboa, Portugal; Departamento de Física, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Portugal, and Departamento de Matemáticas, E. T. S. de Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha, Spain*

E-MAIL: [konotop@cii.fc.ul.pt](mailto:konotop@cii.fc.ul.pt)

WWW: <http://www.ciul.ul.pt/~konotop/homepage.htm>

COLABORADORES: V. S. Shchesnovich (Instituto de Física - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brazil)

Quantum theory of the intra-band resonant tunneling of a Bose-Einstein condensate loaded in a two-dimensional optical lattice is considered. It is shown that the phenomena of quantum collapse and revival can be observed in the fully quantum problem. The meanfield limit of the theory is analyzed using the WKB approximation for discrete equations, establishing in this way a direct connection between the two approaches conventionally used in very different physical contexts. More specifically we show that there exist two different regimes of tunneling and study dependence of quantum collapse and revival on the number of condensed atoms.

---

## Tablero de Galton óptico no lineal

Carlos Navarrete  
*Departamento de Óptica*  
*Universidad de Valencia*  
*Dr. Moliner, 50*  
*46100 - Burjassot, Valencia*

E-MAIL: [derekkorg@gmail.com](mailto:derekkorg@gmail.com)

COLABORADORES: E. Roldán y A. Pérez (Universidad de Valencia)

El tablero de Galton [1] consiste en un tablero inclinado con una serie de clavos distribuidos de forma triangular. Una bola que cae por el tablero chocará contra los clavos, de forma que la distribución de probabilidad de la posición de las bolas al pie del tablero es la del paseo aleatorio (binomial). En los últimos años se han propuesto tanto versiones cuánticas [1] como ondulatorias [2] de este montaje, que de hecho están relacionadas entre sí [3]. En este trabajo hemos hecho una variación de la versión ondulatoria del tablero de Galton. Ésta, se implementa en el interior de una cavidad óptica similar a la utilizada en [2] (en la cual el papel de los clavos lo juegan cruces de Landau-Zener y el de la pelota un haz de luz monocromático). En nuestra generalización mostramos que introduciendo elementos ópticos no lineales en la cavidad puede producirse un fenómeno interesante en la distribución espectral (el equivalente a la distribución de posiciones en el tablero de Galton): aparecen picos con poca anchura que almacenan la mayor parte de la intensidad y se mueven por la red sin sufrir apenas distorsión. Éstos muestran dinámicas muy distintas dependiendo del valor de la no linealidad: pueden sufrir colisiones inelásticas o quedar localizados alrededor de una frecuencia dada, por comentar algunos ejemplos.

## Bibliografía

- [1] J. Kempe, *Contemp. Phys.* **44**, 307 (2003).
- [2] D. Bouwmeester, I. Marzoli, G.P. Karman, W. Schleich and J.P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **61**, 013410 (2000).
- [3] P.L. Knight, E. Roldán and J.E. Sipe, *Phys. Rev. A* **68**, 020301 (2003).

### Suprasolitonés: Ondas no lineales en cadenas de solitonés atómicos.

David Nóvoa Fernández  
*Área de Óptica. Departamento de Física Aplicada.*  
*Universidade de Vigo*  
*Facultade de Ciencias de Ourense. As Lagoas s/n.*  
*32004 - Ourense.*

E-MAIL: [dnovoa@uvigo.es](mailto:dnovoa@uvigo.es)  
 WWW: <http://optics.uvigo.es>

COLABORADORES: Humberto Michinel (U. de Vigo), Víctor M. Pérez-García (Universidad de Castilla-La Mancha), Boris Malomed (Tel Aviv University).

En el presente trabajo se analiza la dinámica de ondas de desplazamiento que tienen lugar en una cadena de solitonés atómicos [1], que se obtienen confinando fuertemente en una dimensión un gas de átomos ultrafríos que se encuentra en estado de Condensación de Bose-Einstein (BEC). De las variadas configuraciones posibles estudiadas, la que resulta más adecuada para la observación experimental es la que se obtiene para dos especies atómicas con longitudes de scattering negativas e iguales entre sí, e interacción entre especies de tipo repulsivo. En condiciones adecuadas, las dos especies atómicas forman trenes de solitonés interpuestos, que se disponen en una cadena lineal alternándose entre sí, pudiendo adoptar una geometría en forma de anillo. En el estado de equilibrio, este *collar de solitonés* es estable y mantiene su forma durante el tiempo de vida media de los condensados (del orden de unos pocos segundos). De este modo es posible estudiar la dinámica de las excitaciones de la cadena lineal.

Asumiendo interacciones solamente entre vecinos próximos, es inmediato obtener que los solitonés que forman la cadena ejercen entre sí fuerzas de repulsión de tipo exponencial. Esto da lugar a un modelo de red discreta unidimensional tipo Toda[2], que tiene dos características notables:

- Es totalmente integrable.
- Posee soluciones tipo solitón (solitonés de Toda).

Así, mediante simulaciones numéricas de la dinámica de un sistema como el descrito de en torno a cincuenta solitonés se ha conseguido demostrar por primera vez la existencia del solitón de Toda en un sistema de materia condensada. Los datos de los cálculos numéricos realizados indican que la observación de los fenómenos simulados es posible dentro del marco de los experimentos actuales con condensados de Bose-Einstein llevados a cabo en varios laboratorios.

## Bibliografía

- [1] V. M. Pérez-García, H. Michinel, H. Herrero *Bose-Einstein solitons in highly asymmetric traps*, *Phys. Rev. A* **57**, 3837–3842 (1998).
- [2] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, Springer-Verlag, Berlin .2nd enlarged ed.,(1989).

### Sesión 7: Vórtices

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

Moderador: Humberto Michinel

#### Vórtices dipolares

Miguel Ángel García-March  
*Interdisciplinary Modeling Group, InterTech.*  
*Departamento de Matemática Aplicada,*  
*Universidad Politécnica de Valencia, Spain.*

E-MAIL: [migarmal@doctor.upv.es](mailto:migarmal@doctor.upv.es)  
 WWW: <http://www.intertech.upv.es>

COLABORADORES: A. Ferrando, Y. Kartashov

Un vórtice se caracteriza por la presencia de una singularidad en la fase en torno a la cual se produce el flujo de energía. En los medios no lineales, este tipo de soluciones pueden propagarse manteniendo su forma cuando existe un balance adecuado entre la difracción y la no linealidad [1]. Sin embargo, en medios autoenfocantes los vórtices son inestables y sólo en ciertos medios, como aquellos caracterizados por potenciales periódicos externos, se encuentran como objetos estables [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

En [10] se prueba que cualquier solución *simétrica* tipo vórtice de una ecuación de Schrödinger no lineal  $q(r, \theta)$  —i.e. aquella cuyo módulo es invariante bajo una transformación discreta de orden  $N$ — en presencia de un potencial lineal con simetría discreta  $\mathcal{R}(r, \theta + 2\pi/N) = \mathcal{R}(r, \theta)$  y un potencial no lineal que depende únicamente del módulo de  $q$ , tiene la forma de una onda de Bloch en la variable angular  $\theta$ :  $q(r, \theta + 2\pi/N) = e^{im2\pi/N} q(r, \theta)$ . La suma del potencial lineal y del potencial no lineal presenta simetría rotacional discreta de orden  $N$  y, por tanto, es periódico en la variable angular. Esto permite obtener un espectro completo de modos de Bloch angulares asociados al operador no lineal  $-1/2\nabla^2 + \mathcal{N}(|q|^2) + \mathcal{R}$ . Uno de estos modos de Bloch es la solución autoconsistente tipo vórtice  $q_{m\beta}(r, \theta) = e^{im\theta} u_{m\beta}(r, \theta)$  donde  $u_{m\beta}(r, \theta + 2\pi/N) = u_{m\beta}(r, \theta)$  [10] y  $\beta$  es el índice de la banda a la que pertenece la solución (dado que las funciones de Bloch se caracterizan también por su índice de banda). En este escenario, la carga topológica o vorticidad asociada al vórtice aparece como el pseudo-momento angular del modo de Bloch. Dicha carga presenta, por tanto, valores discretos.

Por otra parte, los modos de Bloch angulares se pueden escribir como combinaciones de funciones de Wannier (en  $\theta$ ) pertenecientes a la misma banda que el modo de Bloch

y asociadas al mismo operador no lineal [10]:

$$q_{m\beta}(r, \theta) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}mj} W_{m\beta}(r, \theta - \frac{2\pi}{N}j). \quad (1)$$

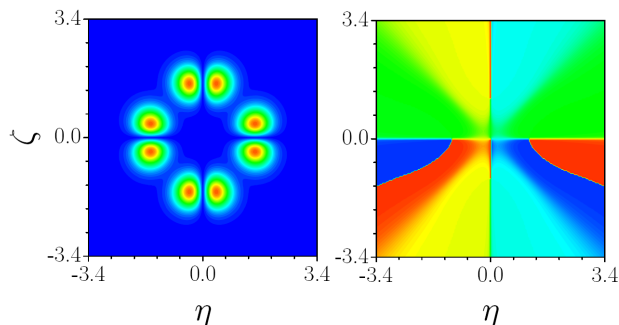


Fig. 1: Módulo del campo (izquierda) y fase (derecha) para un vórtice dipolar.

En este contexto, los vórtices discretos aparecen como modos de Bloch angulares que se pueden expresar en términos de funciones de Wannier de la primera banda, las cuales no presentan ningún nodo en  $\theta$ . Si consideramos vórtices con simetría rotacional discreta pertenecientes a bandas superiores, dichas soluciones se expresarán en términos de funciones de Wannier  $W$  en bandas superiores. Dado que en este caso las funciones presentan nodos en la variable  $\theta$ , estas excitaciones tipo vórtice presentan líneas nodales angulares. Vamos a presentar el caso más simple en el que las funciones de Wannier presentan un único nodo por mínimo del potencial en Eq.(1). Si estas soluciones están, adicionalmente, confinadas radialmente, tendrán la forma de dipolos en cada mínimo del potencial, generándose una superestructura con carga topológica no nula a la que denominamos vórtices dipolares (ver Fig. 1).

Se ha confirmado la existencia de este tipo de soluciones en el caso de redes ópticamente inducidas por fuentes que generan potenciales lineales con la forma de funciones de Bessel de alto orden y en presencia de no linealidad saturable. Las redes de Bessel son estructuras angulares (con simetría rotacional discreta de cualquier orden) que soportan vórtices discretos convencionales. La técnica de la inducción óptica, implementada originalmente para redes periódicas [11, 12, 13, 14], ha sido recientemente adaptada a la creación de redes de Bessel [15, 16].

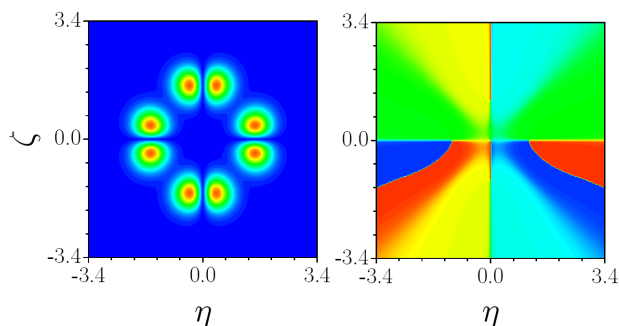


Fig. 2: (a) Vórtice dipolar inestable (b) Vórtice dipolar estable.

Los vórtices dipolares pueden ser estables para ciertos valores del parámetro de saturación y de su norma. Se

han realizado simulaciones sistemáticas de la evolución de estas soluciones cuando se perturban de modo aleatorio,  $q_{\xi=0} = w(\eta, \zeta)[1 + \rho(\eta, \zeta)]$  donde  $\rho$  describe ruido aleatorio. Se ha encontrado que las soluciones pueden ser estables para distancias largas de propagación en ciertos casos (Fig. 2(b)), mientras que en otros son inestables mostrando inestabilidad oscilatoria (Fig. 2(a)).

## Bibliografía

- [1] A. S. Desyatnikov, Y. S. Kivshar, L. Torner, *Progr. Opt.* **47**, 291 (2005).
- [2] B. A. Malomed and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. E* **64**, 026601 (2001).
- [3] J. Yang and Z. H. Musslimani, *Opt. Lett.* **28**, 2094 (2003).
- [4] B. Baizakov, B. A. Malomed, M. Salerno, *Europhys. Lett.* **63**, 642 (2003).
- [5] D. N. Neshev, T. J. Alexander, E. A. Ostrovskaya, Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123903 (2004).
- [6] J. W. Fleischer, G. Bartal, O. Cohen, O. Manela, M. Segev, J. Hudock, D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123904 (2004).
- [7] G. Bartal, O. Manela, O. Cohen, J. W. Fleischer, and M. Segev, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 053904 (2005).
- [8] Y. V. Kartashov, V. A. Vysloukh, L. Torner, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 043902 (2005).
- [9] Y. V. Kartashov, A. Ferrando, A. A. Egorov, L. Torner, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 123902 (2005).
- [10] A. Ferrando, *Phys. Rev. E* **72**, 036612 (2005).
- [11] J. W. Fleischer, T. Carmon, M. Segev, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 023902 (2003).
- [12] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, *Nature* **422**, 147 (2003).
- [13] D. Neshev, E. Ostrovskaya, Yu. Kivshar, W. Krolikowski, *Opt. Lett.* **28**, 710 (2003).
- [14] H. Martin, E. D. Eugenieva, Z. Chen, D. N. Christodoulides, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 123902 (2004).
- [15] X. Wang, Z. Chen, P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 083904 (2006).
- [16] R. Fischer, D. N. Neshev, S. Lopez-Aguayo, A. S. Desyatnikov, A. A. Sukhorukov, W. Krolikowski, Yu. S. Kivshar, *Opt. Express* **14**, 2825 (2006).

## Supresión del comportamiento oscilatorio en la rotura de vórtices.

Juan M. Lopez  
*Department of Mathematics*  
*Arizona State University*  
*Tempe, AZ 85287-1804, USA*

E-MAIL: [lopez@math.la.asu.edu](mailto:lopez@math.la.asu.edu)

WWW: <http://math.la.asu.edu/~lopez/>

COLABORADORES: F. Marques, Y.D. Cui, T.T. Lim.



El fenómeno de la rotura de vórtices se presenta en multitud de aplicaciones, tales como los vórtices de borde de ala en aviones, tornados en la atmósfera, y dispositivos de soporte de llama en combustión. La rotura de vórtices se produce cuando aparece un punto de estancamiento y una zona de recirculación cerca del eje de un vórtice, en forma de burbuja. Si el vórtice es suficientemente intenso, esta zona de recirculación, inicialmente estacionaria, se hace dependiente del tiempo, y estos comportamientos a menudo entrañan problemas mecánicos estructurales debido a posibles resonancias de la frecuencia de oscilación con otras frecuencias del dispositivo, como es el conocido caso del caza de combate F-18A. Ha habido muchos intentos de controlar la aparición de la rotura de vórtices, pero el problema de controlar el comportamiento oscilatorio, de fundamental interés en muchas aplicaciones, ha sido mucho menos estudiado. Presentamos en esta comunicación resultados tanto numéricos como experimentales de la supresión de las oscilaciones en la rotura de vórtices en una geometría sencilla, un recipiente cilíndrico con una de las tapaderas en rotación, que es uno de los modelos clásicos de rotura de vórtices [1, 2, 3, 4]. El tipo de control de las oscilaciones que presentamos es de tipo open-loop, y se basa en modular la rotación de la tapadera giratoria. Dependiendo de la amplitud y frecuencia de la modulación, una variada gama de fenómenos nuevos, incluyendo la supresión de las oscilaciones de la burbuja, tienen lugar: resonancias armónicas y subarmónicas, doblamiento de período y otros.

## Bibliografía

- [1] G.L. Brown & J.M. Lopez. *Axisymmetric vortex breakdown: Part 2. Physical mechanisms*, J. Fluid Mech. **221**, 533–552 (1990).
- [2] J.M. Lopez & A.D. Perry. *Axisymmetric vortex breakdown: Part 3. Onset of periodic flow and chaotic advection*, J. Fluid Mech. **234**, 449–471 (1992).
- [3] M.P. Escudier. *Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall*, Expt. Fluids **2**, 189–196 (1984).
- [4] J.M. Lopez, F. Marques & J. Sanchez. *Oscillatory modes in an enclosed swirling flow*, J. Fluid Mech. **439**, 109–129 (2001).

### Desintegración de vórtices en sistemas con simetría discreta

Albert Ferrando  
*Interdisciplinary Modeling Group, InterTech.*  
*Departamento de Matemática Aplicada,*  
*Universidad Politécnica de Valencia, Spain.*

E-MAIL: [albert.ferrando@uv.es](mailto:albert.ferrando@uv.es)  
 WWW: <http://www.intertech.upv.es>

COLABORADORES: M. A. García-March, M. Zacarés, Emma Merino

Los vórtices aparecen en distintos campos de la física, en particular en el estudio de los condensados de Bose-Einstein o en óptica no lineal. Su estudio en presencia de

sistemas con simetría rotacional discreta ha permitido extraer conclusiones sobre su naturaleza y dinámica. En particular, la carga topológica o vorticidad asociada a una única singularidad de fase en sistemas con simetría discreta rotacional cuando la singularidad se sitúa en el eje de simetría presenta un valor máximo relacionado con el orden de la simetría discreta [1, 2]. Adicionalmente, cuando se propaga un vórtice de carga arbitraria en un sistema con cierta simetría rotacional y encuentra una interfase a partir de la cual el orden de la simetría es menor, la vorticidad experimenta fuertes restricciones. Por ejemplo, se puede estudiar la carga topológica de un vórtice que se propaga en un medio con simetría rotacional completa y que incide sobre una interfase con otro medio que presenta simetría rotacional discreta de orden  $n$ . Los valores permitidos de la carga topológica en el medio de entrada y de salida se relacionan a través de una *regla de paso*, que se traduce en que un vórtice de cierta carga puede transformarse en un vórtice con carga inferior con el mismo o distinto signo (trasmutación de vórtices) o bien que puede perder la naturaleza de vórtice (borrado de vórtices) [3, 4].

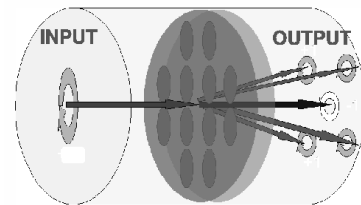


Fig. 1: Representación esquemática de la desintegración de un vórtice de carga arbitraria al incidir en un medio con simetría de orden 4.

Sin embargo, esta regla de paso no tiene poder predictivo sobre la dinámica que lleva al vórtice de entrada a convertirse a la salida en otro vórtice o en un estado sin carga asociada. Vamos a presentar el formalismo teórico que permite analizar el comportamiento dinámico de un vórtice de cierta carga en la presencia de una interfase con simetría rotacional discreta de cierto orden. La ruptura del vórtice se produce como una desintegración del mismo en otros vórtices de menor carga que escapan del eje de simetría siguiendo trayectorias simétricas (Fig. 1). Con el formalismo presentado se puede predecir el número de estos vórtices, el número de frentes de vórtices que escapan del eje, las diferentes velocidades de estos frentes y la carga del vórtice que puede quedar o no en el eje de simetría. El modo en que ocurre este fenómeno de desintegración es determinado por el orden de la simetría rotacional discreta y el valor de la carga topológica del vórtice inicial, recuperándose asintóticamente la regla de paso para la singularidad que queda en el eje de simetría. Se presentan algunos ejemplos numéricos para ilustrar el formalismo.

## Bibliografía

- [1] A. Ferrando, M. Zacarés, and M. A. García-March, *Vorticity cutoff in nonlinear photonic crystal*, Physical Review Letters **95**, 043901 (2005).

- [2] Y. V. Kartashov, A. Ferrando, A. A. Egorov and Ll. Torner, *Soliton topology versus discrete symmetry in optical lattices*, Physical Review Letters **95**, 123902 (2005).
- [3] A. Ferrando, M. Zacarés, M.A. García-March and P. Fernández de Córdoba, *Vortex transmutation*, Physical Review Letters **95**, 123901 (2005).
- [4] V. M. Pérez García, M.A. García-March, and A. Ferrando, *Symmetry-assisted vorticity control in Bose-Einstein condensates*, Physical Review A, **75**, 033618 (2007).

## Sesión 8: Bifurcación y control

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

Moderador: Miguel A. López Guerrero

### A new mechanism for the chaos suppression

Arsen Dzhanoev

*Departamento de Física. Universidad Rey Juan Carlos. 28933 - Móstoles, Madrid, Spain*  
*Moscow State University, 119992 Moscow, Russia*

E-MAIL: [arsen.dzhanoev@urjc.es](mailto:arsen.dzhanoev@urjc.es)

WWW: <http://chaos.phys.msu.ru/dzhanoev/staff.htm>

COLABORADORES: Alexander Loskutov (Moscow State University), Hongjun Cao (Departamento de Física. Universidad Rey Juan Carlos. Department of Mathematics. Beijing Jiaotong University), Miguel A. F. Sanjuán (Departamento de Física. Universidad Rey Juan Carlos)

Most nonlinear dynamical systems may possess chaotic behavior for a certain choice of parameters. Since there are situations for which this behavior might be undesirable, different methods have been developed in the past years to suppress or control chaos. The idea that chaos may be suppressed goes back to the publications [1], [1] where it has been proposed to perturb periodically the system parameters with the final effect of suppression of chaos.

The main idea of our investigations is to apply a general perturbation to a certain dynamical system in such a way that the final behavior is not chaotic [3]. In other words, given a certain dynamical system for which chaos exist for a given choice of parameters, the challenge is to find an appropriate perturbation, that we call the function of stabilization, which would convert the dynamical system into non-chaotic. This is done analytically for a general two-dimensional system, and then the results are applied to the nonlinear pendulum for a choice of parameters for which it shows chaotic behavior. Afterwards, we show by using numerical computations that there is a complete agreement with the analytical results. The physical meaning of the stabilizing perturbation in the case of the pendulum corresponds to a series of hits acting on the pendulum. Nevertheless, what we show here is that we can find this stabilizing perturbation, which eventually will depend on each dynamical system. The idea can be useful for a general class of dynamical systems for which we can try to find

the appropriate means of avoiding the appearance of chaos. The same idea could be useful for dissipative systems and for conservative systems as well.

## Bibliografía

- [1] V.V. Alekseev and A.Loskutov, *Destochastization of a system with a strange attractor by parametric interaction*, Moscow Univ. Phys. Bull. **40**, 46–49 (1985).
- [2] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196–1199 (1990).
- [3] A.Dzhanoev, A.Loskutov, H. Cao, M.A.F. Sanjuan, *A new mechanism of the chaos suppression*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B **7**, 275–284 (2007).

### La bifurcación foco-centro-ciclo límite en la detección de bifurcaciones silla–nodo de conos invariantes en sistemas lineales a trozos

Victoriano Carmona Centeno

*Universidad de Sevilla*  
*Departamento Matemática Aplicada II*  
*Escuela Universitaria Politécnica,*  
*c/ Virgen de África, 7*  
*Sevilla, 41011*

E-MAIL: [vcarmona@us.es](mailto:vcarmona@us.es)

WWW: <http://www.ma2.us.es/>

COLABORADORES: Javier Ros Padilla (U. Sevilla)

En diferentes disciplinas científicas se plantea comúnmente el análisis de la estabilidad del origen en sistemas dinámicos que pueden modelarse de forma lineal a trozos. Dentro de éstos, tienen especial relevancia aquellos sistemas continuos que muestran dos zonas de linealidad y el origen, único punto de equilibrio, se encuentra en la frontera que separa las zonas de linealidad.

En el caso plano, el tipo topológico del origen y, por tanto, su estabilidad está perfectamente establecido (véase, por ejemplo, [4]). No obstante, cuando el sistema es tridimensional, el estudio de la estabilidad del origen no es trivial y esta última está, tal y como se muestra en [1], íntimamente relacionada con la existencia de conos invariantes para el sistema. De hecho, la ausencia de estas superficies invariantes garantiza la estabilidad del origen cuando los autovalores reales de las matrices del sistema tienen parte real negativa. Por contra, la presencia de al menos un cono invariante complica fuertemente el estudio de la estabilidad, pues, incluso cuando las dos matrices del sistema son Hurwitz (estables), el origen puede ser inestable, ver [3].

Por consiguiente, resulta sumamente interesante estudiar la existencia de conos invariantes en el sistema para poder establecer zonas abiertas que garanticen la estabilidad del origen. En [1] se hace un estudio pormenorizado de la existencia de estos conos invariantes, demostrando que a lo sumo existen dos conos invariantes aislados y conjeturando la existencia de una bifurcación silla–nodo de los mismos.

En esta comunicación mostramos que los conos invariantes en el sistema tridimensional se relacionan de forma

biunívoca con las órbitas periódicas de sistemas planos lineales a trozos con dos zonas no homogéneas y con desplazamiento en la recta que separa las zonas de linealidad. A continuación, utilizamos la técnica de las ecuaciones de cierre para el estudio de los ciclos límites de los sistemas planos resultantes. Esta técnica ha sido empleada con éxito en la detección de ciclos límites en sistemas planos simétricos con tres zonas y tridimensionales con dos zonas (ver [2] y [5]) y permite explicar la conocida bifurcación foco-centro-ciclo límite. En nuestro caso, la herramienta permite demostrar la existencia de la conjeturada bifurcación silla-nodo de conos invariantes y dar, en primera aproximación, una expresión computable de la misma. De esta forma, conseguimos ampliar las zonas de estabilidad para el origen.

## Bibliografía

- [1] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. & F. Torres, *Bifurcation of Invariant Cones in Piecewise Linear Homogeneous Systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **15**, 2469–2484 (2005).
- [2] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E., Ros, J. & F. Torres, *Limit Cycle Bifurcation In 3D Continuous Piecewise Linear Systems With Two Zones: Application To Chua'S Circuit*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **15**, 3153-3164 (2005).
- [3] Carmona, V., Freire, E., Ponce, E. & F. Torres, *The continuous matching of two stable linear systems can be unstable*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **16**, 689-703 (2006).
- [4] Freire, E., Ponce, E., Rodrigo, F. & Torres, F., *Bifurcation Sets of Continuous Piecewise Linear Systems with Two Zones*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci Engrg., **8**, 2073–2097 (1998).
- [5] Freire, E., Ponce E. & Ros, J. *Limit cycle bifurcation from a center in symmetric piecewise linear systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos, **9**, 895–907 (1999).

---

### Bifurcación de ciclos límite de un gráfico compacto monodrómico a través del inverso de factor integrante

Isaac A. García  
 Departament de Matemàtica. Universitat de Lleida.  
 Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida

E-MAIL: [garcia@matematica.udl.es](mailto:garcia@matematica.udl.es)  
 WWW: <http://web.udl.es/dept/matematica/ssd/>

COLABORADORES: Héctor Giacomini (Université de Tours), Maite Grau (Universitat de Lleida)

El objetivo de este trabajo consiste en estudiar el número máximo de ciclos límite que pueden bifurcar a partir de un gráfico compacto monodrómico de un sistema diferencial autónomo en el plano con inverso de factor integrante.

Consideramos un sistema diferencial autónomo de la forma:

$$\dot{x} = P_0(x, y), \quad \dot{y} = Q_0(x, y), \quad (1)$$

donde  $P_0(x, y)$  y  $Q_0(x, y)$  son funciones analíticas definidas en un abierto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ . El punto denota la derivación de las variables dependientes  $x$  e  $y$  respecto de la variable real independiente  $t$  (tiempo).

Recordemos que un gráfico del sistema (1) está formado por un número finito de puntos singulares conectados por órbitas regulares del sistema.

Los gráficos monodrómico son aquellos que tienen una aplicación de retorno de Poincaré asociada (quizá sólo en su interior o sólo en su exterior). En este trabajo estamos interesados en los gráficos monodrómico que sean  $\alpha$  o  $w$ -límite, es decir, cuya aplicación de retorno de Poincaré no sea la identidad. En este caso, toda órbita con punto inicial en un entorno del gráfico donde está definida la aplicación de retorno de Poincaré tiende al gráfico cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Consideremos pues un sistema (1) con un gráfico monodrómico compacto y aplicación de Poincaré distinta de la identidad, que denotaremos por  $\Gamma$ , y consideremos una perturbación uniparamétrica y analítica cualquiera de (1), es decir,

$$\dot{x} = P_0(x, y) + \epsilon P_1(x, y; \epsilon), \quad \dot{y} = Q_0(x, y) + \epsilon Q_1(x, y; \epsilon), \quad (2)$$

con  $P_1(x, y; \epsilon)$  y  $Q_1(x, y; \epsilon)$  funciones analíticas en  $(x, y) \in \mathcal{U}$  y el pequeño parámetro real de perturbación  $\epsilon$ . Decimos que un ciclo límite del sistema perturbado (2) bifurca de  $\Gamma$  si éste tiende a  $\Gamma$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  o bien  $\epsilon \rightarrow 0^-$ . Nos interesa estudiar el número máximo de ciclos límite que bifurcan de  $\Gamma$  bajo una perturbación arbitraria (2).

Una función  $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  no idénticamente nula y de clase  $C^1$  que satisface la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$P_0(x, y) \frac{\partial V}{\partial x} + Q_0(x, y) \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \right) V(x, y),$$

es un inverso de factor integrante del sistema (1). En nuestro trabajo siempre suponemos que el campo (1), y sus perturbaciones (2), tienen un inverso de factor integrante analítico definido en un entorno de  $\Gamma$ .

Sean  $(\phi_i(s), \psi_i(s))$ , con  $s \in \mathcal{I}_i \subseteq \mathbb{R}$  e  $i = 1, 2, \dots, k$ , parametrizaciones de cada una de las  $k$  órbitas regulares que forman el gráfico  $\Gamma$ . Dado un punto  $(x, y)$  en un entorno suficientemente pequeño de cada punto de una órbita  $(\phi_i(s), \psi_i(s))$ , siempre podemos encontrar valores de  $s$  y  $n$  que realicen el siguiente cambio de variables:  $x = \phi_i(s) + n\psi'_i(s)$ ,  $y = \psi_i(s) - n\phi'_i(s)$ . Notemos que la variable  $n$  considerada mide la distancia perpendicular de  $(x, y)$  a  $\Gamma$ . Si se satisface que

$$V(\phi_i(s) + n\psi'_i(s), \psi_i(s) - n\phi'_i(s)) = n^{m_i} v_i(s) + \mathcal{O}(n^{m_i+1}),$$

donde  $m_i$  es un entero,  $m_i \geq 1$ , y la función  $v_i(s)$  no es idénticamente nula para ningún  $i = 1, 2, \dots, k$ , decimos que  $V$  tiene multiplicidad  $m = \min_{1 \leq i \leq k} \{m_i\}$  en el gráfico  $\Gamma$ .

Nuestro resultado muestra que, si el sistema (2) con  $\epsilon$  suficientemente pequeño tiene un inverso de factor integrante  $V(x, y; \epsilon)$  analítico definido en un entorno del gráfico monodrómico conjunto límite compacto  $\Gamma$  y  $V(x, y; 0)$  tiene multiplicidad  $m$  en  $\Gamma$ , entonces a lo sumo bifurcan  $m$  ciclos límite de  $\Gamma$ .

Estudiamos varios ejemplos de sistemas en el plano que ilustran este resultado.

---

---

## Sesión 9: Fisiología I

Miércoles 6 de Junio (16:45–17:45)

Moderador: Gustavo Deco

---

### Fitting a dynamical systems model of the kinetics of physiological variables to experimental data: application of a stochastic optimization routine

Maria S. Zakyntinaki  
*Departament de Matemàtiques*  
*Universitat Autònoma de Barcelona*  
 08193 Bellaterra  
 Barcelona

E-MAIL: [mzakyn@mat.uab.es](mailto:mzakyn@mat.uab.es)  
 WWW: <http://mat.uab.es/~mzakyn/>

COLABORADORES: James R. Stirling (Universidad Politécnica de Madrid)

The kinetics of physiological variables in response to exercise has been recently modelled as a dynamical system. The process of fitting the model to a set of raw physiological time series data is, however, not a trivial task. For this reason, a stochastic optimization routine is applied to a set of experimental time series data corresponding to the heart rate response to constant exercise intensity in order to calculate the optimal values of the model for a particular subject. Our optimization method is a very fast, easy to implement and efficient way to obtain the optimal parameters of the model that characterize the condition of the subject. Our method can also be successfully implemented to provide the optimal parameter values of a model describing the kinetics to other physiological variables, such as the oxygen uptake.

---

### Detección y clasificación de potenciales de acción en señales neurofisiológicas mediante técnicas bayesianas

Raúl Benítez Iglesias  
*Departamento de Ingeniería de Sistemas, Automática e Informática Industrial*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
 Edifici U - Campus Sud  
 c/ Pau Gargallo, 5  
 08028 - Barcelona

E-MAIL: [raul.benitez@upc.edu](mailto:raul.benitez@upc.edu)  
 WWW: <http://www.upc.edu>

COLABORADORES: Zoran Nenadic (University of California)

Pese a la reciente aparición de técnicas no invasivas como la resonancia magnética funcional (fMRI) o la tomografía por emisión de positrones (PET), los métodos electrofisiológicos tradicionales siguen teniendo una importancia fundamental en neurociencia. Estas técnicas capturan los potenciales de acción neuronales mediante electrodos extracelulares, proporcionando una información muy localizada espacialmente y de gran resolución temporal.

Pese a que actualmente existe un debate abierto sobre la forma en que la información es codificada y transmitida en el cerebro [1], estudios recientes indican que la clave se encuentra en aspectos temporales asociados a la generación de potenciales de acción neuronal como la frecuencia de disparo o la distribución precisa de los tiempos de activación.

Esta situación, junto con los recientes avances en técnicas de microfabricación de multielectrodos, requieren nuevas técnicas de procesamiento de señal que extraigan la información relevante de forma automática, precisa y robusta.

En este trabajo proponemos un método no supervisado para la detección de potenciales de acción en señales neurofisiológicas extracelulares. La técnica se basa en estudios previos sobre el uso de la transformada wavelet continúa en procesos de detección [2], y reformula el problema de la separación de la señal del ruido dentro del contexto de la selección bayesiana de modelos [3]. Para ello, utilizamos modelos probabilísticos de mezcla de gaussianas para describir la distribución de la señal en el espacio de sus coeficientes wavelet, seleccionando el modelo que mejor describe la señal mediante una estimación bayesiana de la verosimilitud entre el modelo y la señal.

Adicionalmente, la técnica permite una posterior clasificación de los potenciales detectados para identificar las diferentes neuronas que contribuyen en la señal.

El comportamiento del método se ha evaluado mediante señales artificiales generadas a partir de patrones reales, incorporando un ruido realístico obtenido a partir de regiones inactivas de la señal.

El método propuesto tiene un comportamiento superior a las técnicas estándar (detección por umbral de amplitud doble, denoising con umbrales universales, etc.), ofreciendo una mejor estimación de la relación entre señal y ruido y por lo tanto una tasa menor entre potenciales no detectados (omisiones) y detecciones erróneas (falsas alarmas). Los resultados son robustos en un amplio rango de relación de señal-ruido (SNR) y de frecuencias de disparo, lo que permite una aplicabilidad directa del método en cualquier régimen experimental.

## Bibliografía

- [1] C. Koch, *Biophysics of computation: Information processing in single neurons*, Oxford University Press (1999).
  - [2] Z. Nenadic and J. W. Burdick, *Spike detection using the continuous wavelet transform*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **52**, 74–87 (2005).
  - [3] M.S. Lewicki, *Bayesian Modeling and Classification of Neural Signals*, Neural Comp. **6**(5), 1005–1030 (1994).
-

## A biophysical model to explore the effects of network activity on short-term synaptic depression

José Manuel Benita  
*Dept. of Applied Mathematics I*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Avda. Diagonal 647, 08028*  
*Barcelona, Spain*

E-MAIL: [jose.manuel.benita@upc.edu](mailto:jose.manuel.benita@upc.edu)  
 WWW: <http://www.ma1.upc.edu/personal/benita.html>

COLABORADORES: Antoni Guillamon (Universitat Politècnica de Catalunya), Gustavo Deco (Universitat Pompeu Fabra), María V. Sánchez-Vives (Universidad Miguel Hernández-CSIC).

Repetitive stimulation of a synapse often induces a decrease in the postsynaptic potential, a process called short-term synaptic depression (STD). STD is a property of numerous synapses in the cerebral cortex. However, it has been proved that ongoing activity in the cortical network reduces short-term synaptic depression over time. Experiments made by Reig et al, see [2], show that this reduction is related to the intensity and duration of the rhythmic activity.

More recent experiments made by Reig et al, see [3], also show that synaptic facilitation (STF) is stronger during an up-state with respect to a down-state.

We present a biophysical network model that reproduces the experimental observations made by [2]: there is less short-term synaptic depression over time in active oscillatory network than in a silent one. In our model, in contrast with the experimental observations made by [3], we also observed that STD is reduced during an up-state with respect to a down-state. These last reduction was measured over the amplitude of a train of EPSP's of a blocked-sodium neuron. We compare evoked trains of five synaptic potentials in an active oscillatory network during an up-state and during a down-state.

Our network model is taken from that of [1], used for the study of slow oscillatory activity in the cortex. The richness of ionic currents enables us to analyze different sources that can account for the reduction of the STD. The model consists of 1280 neurons from which 1024 are bicompartamental (soma/dendrite) pyramidal neurons (excitatory) and 256 are interneurons (inhibitory).

The neurons in the network are sparsely connected to each other according to a Gaussian distribution centered at 0 with a standard deviation of 150  $\mu m$  (inhibitory) or 250  $\mu m$  (excitatory). In average, every neuron receives 20 presynapses from the population, with no autapses.

The rules for excitation and inhibition among pools of neurons/compartments are the following:

- There are only excitatory connections between the somatic and dendritic compartments.
- There is mutual interaction between the somatic compartments of pyramidal neurons and interneurons.
- Interneurons also inhibit other interneurons.

- Dendrites do not receive inhibitory inputs.

More specifically, the voltage at the somatic compartment ( $V_s$ ) is modeled by the spiking currents  $I_{Na}$  and  $I_K$ , a leakage current  $I_L$ , a fast A-type  $K^+$  current  $I_A$ , a non-inactivating slow  $K^+$  current  $I_{KS}$ , and a  $Na^+$ -dependent  $K^+$  current  $I_{KNa}$ . The dendritic voltage ( $V_d$ ) dynamics contains a high-threshold  $Ca^{2+}$  current  $I_{Ca}$ , a  $Ca^{2+}$ -dependent  $K^+$  current  $I_{KCa}$ , a non-inactivating  $Na^+$  current  $I_{NaP}$ , and an inward rectifier (activated by hyperpolarization) non-inactivating  $K^+$  current  $I_{AR}$ .

The coupling strength between the soma and the dendrite compartments is driven by the difference of voltages modulated through a coupling parameter.

Interneurons contain the classical Hodgkin-Huxley spiking currents  $I_{Na}$  and  $I_K$ , and a leakage current  $I_L$ .

All the ion channels are modeled following the Hodgkin-Huxley formalism with gating variables governed by the first-order kinetics.

For the synaptic connections we assume that a postsynaptic current  $I_{syn} = g_{syn}sP_{rel}(V - V_{syn})$  enters the postsynaptic neuron when the presynaptic neuron's action potential activates the gating variable  $s(t)$ , which follows the differential equation:

$$\frac{ds}{dt} = \alpha f(V_{pre}) - \frac{s}{\tau},$$

being  $f$  a sigmoidal function and  $V_{pre}$  a value related to the presynaptic voltages.

The synaptic transmission in the model is mediated by AMPA, NMDA and GABA. In the case of NMDAR-mediated synaptic transmission, the gating variable is governed by a second-order kinetics.

The synaptic depression is modeled through the probability of release, which follows an exponential decay to a certain resting value, plus a depressive effect driven by the parameter  $f_D$  (usually  $f_D = 0,9$ ), as:

$$\tau_p \frac{dP_{rel}}{dt} = P_0 + P_{rel},$$

$$P_{rel}(t^+) \rightarrow P_{rel}(t) f_D, \text{ if } t = t_k,$$

where  $t^k$  is the last spike-time of the presynaptic neuron.

The initial conditions of the somatic/dendritic voltages, the initial interneuron voltage, the choice of the target neuron and the synaptic probability distribution are the sources of noise of the model, and let us recreate a more realistic cortical network.

In order to study the effect on STD during an up-state and during a down-state, we stimulate our model with a train of five spikes of 0.1 ms duration at 50Hz every second on a presynaptic neuron. We blocked the sodium currents of the postsynaptic (target) neuron and measure the amplitude of the EPSP's caused by the presynaptic train of action potentials.

We observe that the amplitude over the train of five evoked EPSP's during a down-state was higher than during an up-state. This fact means that the effect of STD is stronger during a down-state with respect to an up-state. We claim that this is due to the fact that the synapse is already depressed due to the high activity of the network during an up-state. Our results are coherent with the hypothesis made by [3] for the synaptic facilitation.

In addition, we take advantage of the model by exploring also different possibilities like:

- Can we obtain the same effect in a network with both facilitation and depression factors? How will these two factors interact with each other?
- How much dependent on the depression factor the network activity is?
- If we remove the adaptation frequency given by the term  $I_{NaR}$ , can we observe the same phenomenon? That is, to which extent can the adaptation account for the STD?
- Is it possible to observe reduction of STD after removing the currents that give slow oscillations?
- Using a simplified model for the dynamics of the synaptic strengths, can we give a mathematical interpretation for the different behaviours of the STD?

## Bibliografía

- [1] A. Compte, M.V. Sánchez-Vives, D.A. McCormick and X.-J. Wang, *Cellular and Network Mechanisms of Slow Oscillatory Activity (<1 Hz) and Wave Propagations in a Cortical Network Model*, J. Neurophysiol, **89**, 2707–2725 (2003).
- [2] R. Reig, R. Gallego, L.G. Nowak and M.V. Sánchez-Vives, *Impact of Cortical Network Activity on Short-term Synaptic Depression*, Cereb Cortex., Aug 17 (2005).
- [3] R. Reig and María V. Sanchez-Vives *In press*.

---

## Sesión 10: Solitones espaciales ii

Miércoles 6 de Junio (18:15–19:15)

Modera: Albert Fernando

---

### Hipersolitones en redes ópticas inducidas

Maria Rodas Verde  
 Departamento de Física Aplicada,  
 Universidade de Vigo  
 Facultade de Ciencias de Ourense,  
 As Lagoas, s/n, 32004 Ourense

E-MAIL: [mrodas@uvigo.es](mailto:mrodas@uvigo.es)  
 WWW: <http://optics.uvigo.es>

COLABORADORES: Susana Doval González, José Ramón Salgueiro Piñeiro, Humberto Michinel Álvarez

Las redes ópticas inducidas son cristales creados mediante la iluminación de un material apropiado (usualmente fotorrefractivo) con cierto número de haces coherentes entre sí, de forma que el patrón de interferencia generado induzca una modulación periódica del índice de refracción. Debido a la respuesta no lineal relativamente alta de este tipo de materiales, resultan idóneos para la realización de experimentos con ondas no lineales en potenciales periódicos, campo que goza de un gran interés en los últimos tiempos por sus aplicaciones en el control de las propiedades de la luz[1].

Se han estudiado las ondas no lineales existentes en redes no lineales periódicas inducidas en medios con respuesta fotorrefractiva[2], modeladas por la siguiente ecuación no lineal:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \Psi - \frac{\Psi}{1 + I_g(x, y) + |\Psi|^2} = 0, \quad (1)$$

siendo  $\Psi(x, y, z)$  la envolvente del campo y  $I_g(x, y) = I_0 \cos^2(\pi x/d) \cos^2(\pi y/d)$  el patrón de intensidad que genera la red periódica (de período  $d$ ). Las soluciones estudiadas presentan forma de múltiples haces que se propagan en paralelo, ligados a las celdas de la red o a sus nodos, y pueden existir con un número arbitrario de lóbulos cada uno con la misma fase o con fase opuesta en relación a sus vecinos. Por esta razón se han denominado *hipersolitones*. Las soluciones estacionarias del sistema se han calculado numéricamente, y las diferentes familias existentes se han clasificado, estando cada una representada por una curva en el plano  $(\beta, P)$ , donde  $\beta$  es la constante de propagación y  $P = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy$  la potencia.

Se ha estudiado la estabilidad de las diferentes familias de soluciones estacionarias, resultando completamente estables aquellas cuyos lóbulos vecinos se hallan en oposición de fase. Para las demás soluciones se han encontrado dos tipos de inestabilidades. Una de ellas, oscilatoria, correspondiente a los tramos de pendiente positiva de las curvas de potencia. La otra, caótica, correspondiente a los tramos de pendiente negativa.

## Bibliografía

- [1] D.N. Christodoulides, F. Lederer, Y. Silberberg, *Nature*, **424**, 817–823 (2003).
- [2] J.W. Fleischer, M. Segev, N.K. Efremidis, and D.N. Christodoulides, *Nature*, **422**, 147–150 (2003).

---

### Formación de patrones en resonadores termoacústicos

Isabel Perez-Arjona  
 Departament de Física  
 Universitat Politècnica de València  
 Crta. Nazaret-Oliva, s/n  
 46730 Grau de Gandia (València), Spain

E-MAIL: [iparjona@upvnet.upv.es](mailto:iparjona@upvnet.upv.es)  
 WWW: <http://nlp.webs.upv.es/>

COLABORADORES: G. J. de Valcárcel (Universitat de València), V. J. Sánchez-Morcillo, J. Redondo and J. Martínez-Mora (Universitat Politècnica de València).

En este trabajo[1] se estudia la dinámica de los ultrasónicos en un resonador acústico que contiene un medio viscoso en su interior. Se deducen las ecuaciones que describen la evolución espacio-temporal de la presión y de la temperatura. Consideramos un resonador extenso transversalmente (sus dimensiones transversales son mayores que las longitudinales), lo cual permite considerar los efectos de difracción y difusión de la presión y de la temperatura, respectivamente, en la dirección transversal del resonador. El sistema muestra biestabilidad entre distintos estados. Este proceso de formación de patrones, característico de muchos otros sistemas disipativos lejos del equilibrio, se describe aquí por primera vez en resonadores acústicos. Además de patrones extensos, el sistema también exhibe estructuras localizadas (llamadas solitones de cavidad) que conectan localmente la solución homogénea con el patrón espacialmente modulado. Esto ocurre en el dominio de biestabilidad. La existencia y estabilidad de estas estructuras localizadas se demuestra numéricamente para un resonador que contiene glicerina, resultados que están de acuerdo con resultados experimentales anteriores[2]. Mediante métodos perturbativos, la dinámica puede reducirse, en las proximidades del punto de biestabilidad naciente, a una ecuación universal de parámetro de orden, un ecuación Swift-Hohenberg modificada, deducida anteriormente en el contexto de la óptica no lineal.

## Bibliografía

- [1] I. Perez-Arjona, V. J. Sanchez-Morcillo and G. J. de Valcarcel, [arxiv.org/nlin.PS/0702009](http://arxiv.org/nlin.PS/0702009).  
 [2] G. A. Lyakhov *et al.*, *Acoust. Phys.* **39**, 158 (1993).

---

## Simetrías de Lie y soluciones exactas para ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidad modulada espacialmente

Juan Belmonte Beitia  
*Departamento de Matemáticas,  
 E.T.S.I. Industriales,  
 e Instituto de Matematica Aplicada  
 a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI).  
 Universidad de Castilla-La Mancha,  
 13071 Ciudad Real*

E-MAIL: [Juan.Belmonte@uclm.es](mailto:Juan.Belmonte@uclm.es)  
 WWW: <http://matematicas.uclm.es/jbelmonte>

COLABORADORES: Víctor M. Pérez García (Universidad de Castilla-La Mancha), Vadym Vekslerchik (Universidad de Castilla-La Mancha), Pedro Torres (Universidad de Granada).

Usando teoría de grupos de Lie y transformaciones canónicas, calculamos soluciones explícitas de ecuaciones de Schrödinger no lineales con no linealidades modulacionalmente espaciadas (INLSE). Se introducirá la teoría general y se mostrarán diferentes ejemplos de aplicación. Se usará la teoría cualitativa de sistemas dinámicos para mostrar las propiedades de estas soluciones y, finalmente, se obtendrán soluciones asimétricas de la INLSE.

## Bibliografía

- [1] Juan Belmonte-Beitia, Victor M. Perez-García, Vadym Vekslerchik and Pedro Torres, *Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities*, *Physical Review Letters* **98**, 064102 (2007).  
 [2] Juan Belmonte-Beitia, Victor M. Perez-García, Vadym Vekslerchik and Pedro Torres, *Lie symmetries, Qualitative Analysis and exact solutions of nonlinear Schrödinger equations with inhomogeneous nonlinearities*, Preprint.

---

## Sesión 11: Caos hamiltoniano

Miércoles 6 de Junio (18:15–19:35)

Moderador: Amadeu Delshams

---

### Dispersión caótica en sistemas hamiltonianos con escapes sometidos a ruido y disipación

Jesús M. Seoane  
*Departamento de Física  
 Universidad Rey Juan Carlos  
 Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos  
 28933 - Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [jesus.seoane@urjc.es](mailto:jesus.seoane@urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos), Ying-Cheng Lai (Arizona State University)

La dispersión caótica en sistemas hamiltonianos con escapes son de fundamental interés en muchos campos de la física tales como en mecánica de fluidos, física atómica, molecular y nuclear, mecánica celeste, etc. En la dispersión caótica podemos distinguir, en función de un parámetro del sistema como la energía, un régimen hiperbólico y uno no hiperbólico. Nos centraremos en el régimen no hiperbólico ya que este es sensible a perturbaciones como el ruido y la disipación, aunque estas sean muy débiles. Estas perturbaciones transforman la probabilidad de supervivencia de las partículas en la región de dispersión de una ley algebraica a una exponencial. Un estudio del espacio de las fases demuestra que éste posee, además de una rica estructura fractal, la propiedad de Wada. Esta propiedad topológica, relacionada con la incertidumbre sobre la evolución del sistema, es inalterable ante la presencia de una disipación débil [2] mientras que se destruye cuando introducimos una pequeña cantidad de ruido [3] en el sistema. Por otro lado, la función de dispersión, que nos relaciona el tiempo que tarda en escapar una partícula de la región de dispersión con una de las variables del sistema, nos permitirá calcular la dimensión fractal del conjunto de singularidades de dicha función. La dimensión fractal se mantendrá muy próxima a la unidad cuando el ruido actúe sobre el sistema. En cambio, cuando se introduzca disipación en el sistema, la dimensión fractal presentará dos regiones claramente diferenciadas, una de rápido decrecimiento y otra en la cual

ésta variará de forma muy lenta [4]. Todos estos resultados se acompañarán del debido soporte numérico, usando como modelos prototipos una aplicación discreta bidimensional y un flujo bidimensional, mostrando la universalidad de los mismos. Igualmente se proporcionarán argumentos geométricos y heurísticos para corroborar los resultados numéricos obtenidos.

## Bibliografía

- [1] J.M. Seoane, J. Aguirre, Miguel A. F. Sanjuán, and Y-C Lai, *Basin topology in dissipative chaotic scattering*, *Chaos* **16**, 023101 (2006).
- [2] J.M. Seoane, Miguel A. F. Sanjuán, and Y-C Lai, *Fractal dimension in dissipative chaotic scattering*, *Phys. Rev. E* (Submitted).
- [3] J.M. Seoane, Miguel A. F. Sanjuán, and Y-C Lai, *Noisy chaotic scattering*, (In preparation).

## Cálculo numérico de números de rotación y sus variaciones

Alejandro Luque

*Departament de Matemàtica Aplicada I*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
*Diagonal 647*  
*08028 Barcelona*

E-MAIL: [alejandroluque@upc.edu](mailto:alejandroluque@upc.edu)

COLABORADORES: Jordi Villanueva, Tere M. Seara

El elemento más significativo en el estudio de aplicaciones del círculo  $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  es su número de rotación. En el caso en que éste sea irracional contiene, básicamente, toda la información sobre la dinámica de la aplicación. Si bien una aplicación del círculo puede verse como un modelo matemático abstracto, no hay que perder de vista que la dinámica sobre cualquier curva invariante puede describirse en términos de una aplicación de  $\mathbf{T}^1$ . Más en general, la dinámica sobre un toro invariante de un sistema dinámico puede modelarse como una aplicación del toro estándar  $\mathbf{T}^n$ .

En [2] se ha desarrollado un método que permite calcular, con gran precisión, números de rotación (irracionales) de aplicaciones del círculo, bajo hipótesis muy razonables para su aplicación. Éste método puede emplearse directamente para el cálculo de curvas invariantes de aplicaciones *twist*. Asimismo, puede ser fácilmente generalizado para la obtención de las variaciones del número de rotación con respecto a parámetros y, con más esfuerzo, para el cálculo de curvas invariantes de aplicaciones *no twist* generales [1, 3]. Finalmente, su extensión al caso multi-dimensional  $\mathbf{T}^n$  es inmediata.

## Bibliografía

- [1] A. Luque, J. Villanueva, *Numerical computation of rotation numbers and their variational*. En preparación.
- [2] T.M. Seara, J. Villanueva, *On the numerical computation of Diophantine rotation numbers of analytic circle maps*, *Physica D* **217**, 107–120 (2006).

- [3] T.M. Seara, J. Villanueva, *Numerical computation of the asymptotic size of the rotation domain for the Arnold family*. En preparación.

## Rydberg Hydrogen atom near a metallic surface: Stark regime through two pitchfork bifurcations

José Pablo Salas

*Área de Física Aplicada*  
*Universidad de La Rioja*  
*26006 - Logroño, La Rioja*

E-MAIL: [josepablo.salas@unirioja.es](mailto:josepablo.salas@unirioja.es)

COLABORADORES: Manuel Iñarra (Universidad de La Rioja), Ana Isabel Pascual (Universidad de La Rioja) y Víctor Lanchares (Universidad de La Rioja)

The interaction of Rydberg atoms with metal surfaces in the presence of an external electric field is an active field of investigation [1, 2, 3]. When the atom approaches the surface or when the electric field increases, quantum studies have shown that the electron falls on a Stark-like regime in which some states are strongly oriented toward or opposite to the surface [3, 4]. We show in this work that, from a classical point of view, the Stark regime takes place through two consecutive pitchfork bifurcations. In this regime, two rectilinear orbits are the backbone of the phase space: One of them is oriented toward the surface while the other is oriented to the vacuum.

Due to the large size of a Rydberg atom, the interactions with the metal surface take place relatively far from the surface, and a surface-atom image potential is suitable [2]. Therefore, we consider a Rydberg hydrogen atom perturbed by a metal surface located at the plane  $z = -d$ , and by a uniform electric field of strength  $F > 0$  perpendicular to the surface. In cylindrical coordinates and a.u., the electronic Hamiltonian of the system is given by [5]

$$\mathcal{H} = \frac{P_\rho^2 + P_z^2}{2} + \frac{P_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2d+z)^2}} - \frac{1}{4(d+z)} + Fz. \quad (1)$$

Because  $P_\phi$  is conserved, (1) defines a two degrees of freedom dynamical system. We focus on the case  $P_\phi = 0$ . Scaling coordinates and momenta as  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/d$ ,  $\mathbf{P}' = d^{1/2}\mathbf{P}$  and after dropping primes, (1) becomes

$$\mathcal{E} = \frac{P_\rho^2 + P_z^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2+z)^2}} - \frac{1}{4(1+z)} + fz, \quad (2)$$

and the dynamics depends on the scaled energy  $\mathcal{H}' = \mathcal{E} = E d$  and on the scaled electric field  $f = F d^2$ . Besides the infinite potential well at  $(0, 0)$ , the effective potential  $U(\rho, z)$  in (2) has a unique critical point  $P_s = (0, z_s)$  of saddle type which is the ionization channel through which the electron can be captured by the metal surface. This escape channel is favoured by the electric field because, as  $f$  increases,  $z_s$  approaches zero and the escape energy  $\mathcal{E}_s$  decreases.

We use Poincaré surfaces of section (*PSOS*) to illustrate the phase space structure. To avoid the numerical problems involved with the singularity at the origin, we use regularized coordinates  $(u, P_u, v, P_v)$  [6]. We define the



*PSOS* as the projection of the phase trajectories on the  $u = 0$  plane with  $P_u \geq 0$ . For  $f = 0$  and  $\mathcal{E} = -2$  the *PSOS* (see Fig. 1a) shows four important structures:

- i) The stable central fixed point  $I_\infty^+ = (0,0)$  corresponds to rectilinear orbits along the positive  $z$ -axis. We note that  $I_\infty^+$  is an analytical solution of the equations of motion. The levels around  $I_\infty^+$  are vibrational-type quasiperiodic orbits named as  $V_\infty^+$ .
- ii) The two stable fixed points  $C$  located at the  $v$ -axis are almost circular orbits travelled in opposite directions.
- iii) The above regions are kept apart by a separatrix passing through two hyperbolic points  $H$  at the  $P_v$  axis.
- iv) The rectilinear orbits along the negative  $z$ -axis (named  $I_\infty^-$ ) are also analytical (stable) solutions of the equations of motion. Because  $I_\infty^-$  are tangent to the flux in our Poincaré map, they correspond to the limit of the *PSOS*. The levels above the separatrix are vibrational quasiperiodic orbits denoted as  $V_\infty^-$ .

For  $f = 0,01$  (see Fig. 1b) the unstable points  $H$  move towards the point  $I_\infty^+$ . When the electric field reaches the value  $f_1 \approx 0,016875$ , a pitchfork bifurcation takes place and only  $I_\infty^+$ , which becomes unstable, survives (see Fig. 1c). As the electric parameter tends to  $0,031875$ , the fixed points  $C$  approach  $I_\infty^+$  (see Fig. 1d). When  $f = 0,031875$ , a second pitchfork bifurcation occurs in such way that only  $I_\infty^+$ , which becomes stable, survives (see Fig. 1e). After this bifurcation, there is a smooth evolution from vibrational  $V_\infty^+$  to vibrational  $V_\infty^-$  orbits: The nearer the orbit to  $I_\infty^+$  ( $I_\infty^-$ ), the greater is its orientation along the positive(negative)  $z$ -axis.

From the second bifurcation, a Stark-like regime prevails because, roughly speaking, the electric field polarizes the atom along the  $z$ -axis because the orbits are mainly oriented along the  $z$  direction. From a quantum point of view, theoretical studies [2, 3] have revealed that wave functions are strongly oriented along that direction. This fact can be observed in Fig. 4 of reference [3], where two opposite strongly oriented states are depicted for an applied electric field of  $F = 2,8 \times 10^{-6}$  a.u. and an atom/surface separation  $d = 670$  a.u. The parameters used in that figure give the scaled values  $f \approx 1,3$  and  $\mathcal{E} \approx -3,3$ , and the corresponding *PSOS* shows a clear Stark structure (see Fig. 1f).

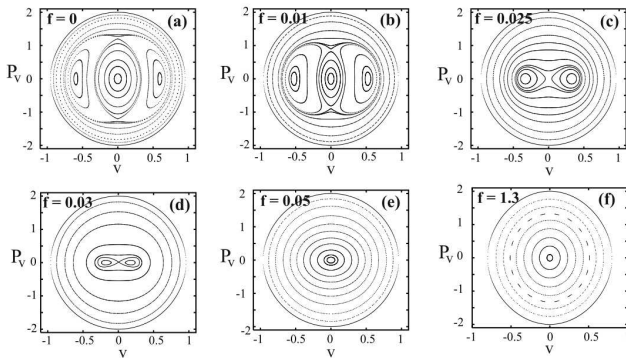


Fig. 1: Evolution of the Poincaré surfaces of section as a function of  $f$ . From (a) to (e) the scaled energy is  $\mathcal{E} = -2$ . For (f) the scaled energy is  $\mathcal{E} = -3,3$ .

## Bibliografía

- [1] Kurpick P., Thumm U. and Wille U., Phys. Rev. A **57** 1920 (1998).
- [2] Hanssen J., Martin C.F. and Nordlander P., Surface Science **423** L271 (1999).
- [3] Zhou Z., Oubre C., Hill S.B., Nordlander P. and Dunning F.B., Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. Sect. B
- [4] Hill S.B., Haich C.B., Zhou Z., Nordlander P., Dunning F.B., Phys. Rev. Lett. **85** 5444 (2000).
- [5] Ganesan K. and Taylor K.T., J. Phys. B **29**, 1293 (1996).
- [6] Levi-Civita T., University of Bologna **2** (1965).

## Frontera orden-caos y cicatrices cuánticas en sistemas moleculares

Francisco Javier Arranz  
 Grupo de Sistemas Complejos  
 E.T.S.I. Agrónomos  
 Universidad Politécnica de Madrid  
 28040 - Madrid, España

E-MAIL: [fj.arranz@upm.es](mailto:fj.arranz@upm.es)

COLABORADORES: C. G. Giralda (GSC-CIEMAT), L. Seidel (GSC-UPM), R. M. Benito (GSC-UPM), F. Borondo (UAM)

Dentro del tema del *caos cuántico* tienen una especial relevancia las denominadas *manifestaciones cuánticas del caos*, esto es, las características que se observan en sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico. Además, dichas manifestaciones cuánticas están intrínsecamente relacionadas con el ya viejo tema, aunque aún abierto, de la correspondencia entre mecánica clásica y mecánica cuántica.

En este contexto, la aparición de estados cuánticos cuya densidad de probabilidad se localiza a lo largo de órbitas periódicas inestables resulta especialmente interesante, como fue apuntado por Heller [3] quien acuñó el término *cicatriz* (“scar”, en inglés) para denominar a estos estados.

Por otra parte, en nuestro grupo se han realizado diferentes trabajos en los que se muestra la utilidad, en el estudio del caos cuántico, del *diagrama de correlación* de los estados estacionarios (aquellos que poseen energía definida) frente a la constante de Planck  $\hbar$  [2]. En dicho diagrama se representa la evolución de la autoenergía de cada estado en función de  $\hbar$ , observándose diferentes *cruces evitados* o *resonancias cuánticas* que dan lugar a la mezcla de los estados implicados. Esta mezcla es local en muchas de las resonancias (solo se observa en el entorno del cruce evitado), pero existen otras que son permanentes. Especialmente interesante es la serie de resonancias con mezcla permanente que constituye la frontera entre orden y caos, ya que los estados mezcla que aparecen son precisamente cicatrices cuánticas donde además el orden de resonancia cuántico y clásico coinciden.

Esta frontera de cicatrices ha sido estudiada exhaustivamente en nuestro grupo para el sistema molecular Li-CN

[2], y ahora se presentan nuevos resultados para los sistemas H-CN y HO<sub>2</sub>. Estos resultados nos permiten generalizar los estudios previos realizados en la molécula Li-CN, mostrando que en la transición orden-caos en sistemas moleculares se hallan involucradas ciertas cicatrices cuánticas, las cuales son el indicador de que el sistema está al borde del caos.

## Bibliografía

- [1] E. J. Heller, Phys. Rev Lett. **53**, 1515 (1984); E. J. Heller, *Chaos and Quantum Physics*, M. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin eds. (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [2] F. J. Arranz, F. Borondo, R. M. Benito, J. Chem. Phys. **104**, 6401 (1996); F. J. Arranz, F. Borondo, R. M. Benito, J. Chem. Phys. **107**, 2395 (1997); F. J. Arranz, F. Borondo, R. M. Benito, Phys. Rev. Lett. **80**, 944 (1998); J. C. Losada, J. M. Estebarez, R. M. Benito, F. J. Arranz, F. Borondo, Int. J. Bifurcation Chaos **9**, 2285 (1999); F. J. Arranz, R. M. Benito, F. Borondo, J. Chem. Phys. **123**, 044301 (2005).

---

## Sesión 12: Ciclos límite y sistemas integrables

Miércoles 6 de Junio (18:15–19:35)

Modera: Miguel Ángel López Guerrero

---

### Ciclos límite para sistemas cúbicos con simetría de orden 4

María Jesús Álvarez

*Departament de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de les Illes Balears  
Edifici Anselma Turmeda, Campus UIB  
Crtra. Valldemossa, km 7,5  
07122 Palma de Mallorca*

E-MAIL: [chus.alvarez@uib.es](mailto:chus.alvarez@uib.es)

WWW: <http://dmi.uib.es/~chusa/>

COLABORADORES: Armengol Gasull (Universitat Autònoma de Barcelona), Rafel Prohens (Universitat de les Illes Balears)

En este trabajo estudiamos los sistemas cúbicos que son invariantes para una rotación de  $2\pi/4$  radianes. Se escriben como  $\dot{z} = \varepsilon z + p z^2 \bar{z} - \bar{z}^3$ , donde  $z$  es complejo, el tiempo es real y  $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ ,  $p = p_1 + ip_2$  son parámetros complejos.

Es bien sabido que si estos sistemas tienen puntos críticos en el infinito, *i.e.*  $|p_2| \leq 1$ , pueden presentar como mucho un ciclo límite (hiperbólico) que rodea el origen. Por otro lado, cuando no tienen puntos críticos infinitos existen ejemplos con al menos dos ciclos límites rodeando nueve puntos críticos. En este trabajo damos dos criterios para probar en algunos casos la unicidad e hiperbolicidad del ciclo límite que rodea el origen. Nuestros resultados se

aplican a los sistemas que tienen un ciclo límite rodeando 1, 5 ó 9 puntos críticos, siendo el origen uno de ellos.

---

### Polynomial planar vector field with algebraic limit cycles

Rafael Ramírez I.

*Universitat Rovira i Virgili  
Tarragona*

E-MAIL: [rafaelorlandoramirez@urv.cat](mailto:rafaelorlandoramirez@urv.cat)

COLABORADORES: N. Sadovskaia (Universitat Politècnica de Catalunya)

We construct a polynomial differential system that admits two invariant algebraic curves. For such a system we solve the Darboux problem (the existence of the Darboux first integral) and the Poincaré problem (the existence of an upper bound for the degree of invariant algebraic curve) and study the second part of the Hilbert's 16<sup>th</sup> problem for algebraic limit cycles (the existence of an upper bound for the number of algebraic limit cycles). If we denote by  $A(n, 2)$  the maximum number of algebraic limit cycles of the constructed vector field then we prove that

$$A(n, 2) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1.$$

In particular we prove that the upper bound is reached for  $n = 3$ .

We exhibit an explicit vector field of degree  $n$  with two invariant algebraic curves which has precisely the bounded components of the given curves as limit cycles and we show that  $A(n, 2) \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ .

---

### Integrability and multiple invariant algebraic curves

Chara Pantazi

*Departament de Matemàtica Aplicada I  
ETSEIB-UPC  
Ava. Diagonal 647  
08028 Barcelona, Espanya*

E-MAIL: [chara.pantazi@upc.edu](mailto:chara.pantazi@upc.edu)

WWW: <http://www.ma1.upc.edu/personal/pantazi.html>

COLABORADORES: C. Christopher (University of Plymouth), J. Llibre (UAB) and S. Walcher (Lehrstuhl A für Mathematik)

A first integral of a differential system in the plane determines completely its phase portrait. So a natural question arises: For a given vector field in the plane how to recognise the existence of a first integral? Darboux with his method [7] showed how the existence of sufficiently many invariant algebraic curves forces the existence of a first integral or an integrating factor for planar polynomial differential systems. Nowadays, Darboux's theory of integrability has been extended taking into account the multiplicity or coalescence of invariant algebraic curves through the existence of exponential factors, see [1, 2, 3, 6]. Inverse integrating factors are also of great interest. They play

an important role in the center problem and in the 16<sup>th</sup> Hilbert problem.

It has been shown by Singer [8] that polynomial differential systems with Darboux integrating factors are exactly those with Liouvillian first integrals.

An algebraic approach to questions of Darboux integrability was given in [5] in the case of curves of multiplicity one; and extended to curves of multiplicity greater than one in [6], and is further extended in [4].

In this talk we present the complete solution of the inverse problem for invariant algebraic curves with a given multiplicity and for integrating factors, under generic assumptions regarding the (multiple) invariant algebraic curves involved. In particular we prove, in this generic scenario, that the existence of a Darboux integrating factor implies Darboux integrability. Furthermore we present examples where the genericity assumption does not hold and indicate that the situation is different for these.

## Bibliografía

- [1] C.J. Christopher, *Invariant algebraic curves and conditions for a center*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **124A** (1994), 1209–1229.
- [2] C. Christopher and J. Llibre, *Algebraic Aspects of Integrability for Polynomial Systems*, Qualitative Theory of Dynamical Systems **1** (1999), 71–95.
- [3] C. Christopher and J. Llibre, *Integrability via Invariant Algebraic Curves for Planar Polynomial Differential Systems*, Annals of Differential Equations **16** (2000), 5–19.
- [4] C. Christopher, L. Llibre, Ch. Pantazi and S. Walcher, *Inverse problems for multiple invariant algebraic curves*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh.
- [5] C. Christopher, J. Llibre, C. Pantazi and X. Ziang, *Darboux integrability and invariant algebraic curves for planar polynomial systems*, J. Physics A: Gen. Math. **35** (2002), 2457–2476.
- [6] C. Christopher, J. Llibre and V. Pereira, *Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields*, preprint 2004.
- [7] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. Math. 2<sup>ème</sup> série **2** (1878), 60–96; 123–144; 151–200.
- [8] M.F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.

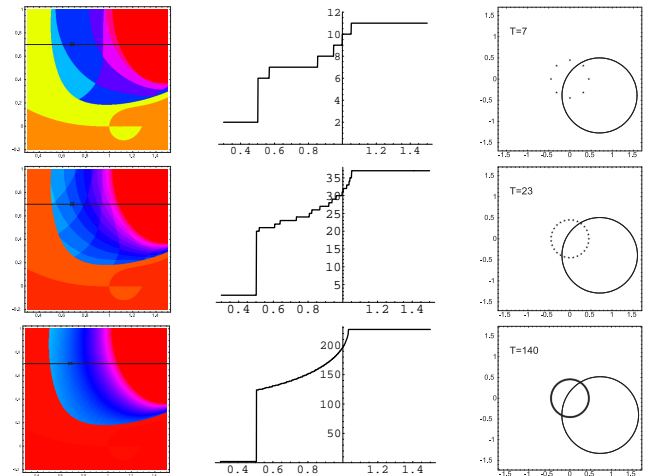
## Superficies de Riemann y complejidad en sistemas dinámicos

David Gómez-Ullate Oteiza  
 Departamento de Física Teórica II  
 Universidad Complutense  
 Plaza de las Ciencias, 3  
 28040 - Madrid

E-MAIL: david.gomez-ullate@fis.ucm.es

COLABORADORES: F. Calogero (U. Roma “La Sapienza”), P. Santini (U. Roma “La Sapienza”), Yu. Fedorov (U. Politécnica Catalunya)

En esta charla haré un breve resumen de resultados recientes [1, 2] sobre la relación entre la complejidad de las órbitas de un sistema dinámico y ciertas propiedades de las superficies de Riemann asociadas a las soluciones.



## Bibliografía

- [1] F. Calogero, D. Gómez-Ullate, P. M. Santini, and M. Sommacal, *The transition from regular to irregular motions, explained as travel on Riemann surfaces*, J. Phys. A **38** 8873–8896 (2005).
- [2] Yu. Fedorov and D. Gómez-Ullate *Dynamical systems on infinitely sheeted Riemann surfaces*, Physica D, en prensa: doi:10.1016/j.physd.2007.02.001 (2007).

---

## Sesión 13: Análisis y modelos económicos

Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)

Moderador: Lluís Alseda

---

### La técnica de datos surrogados en el análisis de la serie de rendimientos del IBEX-35

M<sup>a</sup> Victoria Caballero Pintado  
 Métodos Cuantitativos para la Economía  
 Facultad de Economía y Empresa  
 Campus de Espinardo  
 30100 - Murcia

E-MAIL: mvictori@um.es

COLABORADORES: Lourdes Molera Peris

Antes de construir un modelo para un conjunto de datos con el propósito de su predicción, es conveniente estudiar si la serie responde a un tipo de comportamiento específico; por ejemplo, si tiene una componente determinista lineal o no lineal, o bien se trata de datos aleatorios independientes. Con este objetivo se han

desarrollado las técnicas de datos surrogados, que en los últimos años se han centrado específicamente en el campo de la no linealidad ([Small and Tse, *Studies in Non-linear Dynamics and Econometrics*, 7(3), 2003], [Nakamura and Small, *Physica A* 366, 2006]). Aunque la serie de rendimientos del IBEX-35 ha sido muy estudiada, en este trabajo se analiza desde una perspectiva diferente, puesto que se le aplican los últimos algoritmos de datos surrogados para comprender su comportamiento.

## Análisis en tiempo-frecuencia de series caóticas en comunicaciones y finanzas

Álvaro Arenas Pingarrón

*Departamento de Tecnología Fotónica*

*ETSI Telecomunicación,*

*Universidad Politécnica de Madrid*

*Avda. de la Complutense, s/n. Ciudad Universitaria*

*Madrid, 28040*

E-MAIL: [alvaronas@teleline.es](mailto:alvaronas@teleline.es)

COLABORADORES: Ana Pilar González Marcos, José Antonio Martín Pereda

En los sistemas caóticos la salida depende de las condiciones iniciales, por lo que dadas éstas el resultado es una señal determinista. Sin embargo, al producirse una pequeña perturbación de las condiciones iniciales, la diferencia entre las salidas es tal que están incorreladas, teniendo comportamientos totalmente diferentes. En este sentido, se considera el sistema como un proceso estocástico que depende de las condiciones iniciales, y cada una de las posibles salidas como una realización del proceso. Para analizar la naturaleza caótica o no de las señales disponibles, en nuestro trabajo se recurre a las técnicas clásicas utilizadas para las señales aleatorias, tales como la autocorrelación, la correlación cruzada y la estimación de los espectros de potencia mediante las técnicas de Bartlett y Welch [1]. Además, utilizamos las distribuciones tiempo-frecuencia para estimar el espectro instantáneo de potencia, combinando la distribución básica de Wigner-Ville [2] con las modificaciones de Bartlett y Welch.

Las señales que analizamos son de carácter digital y analógico. Las primeras son tanto binarias como multinivel, y están sintetizadas a partir de software propio que simula el comportamiento de un dispositivo fotónico digital denominado *Optical Programmable Logic Cell* [3], en su configuración como generador de caos digital. Las señales binarias se analizan en su naturaleza intrínseca digital y también tras modular en fase a símbolos gaussianos o rectangulares. Las analógicas son de ámbito financiero, en concreto el valor de las acciones de una empresa de telecomunicación a lo largo de las dos últimas décadas [4].

Para las señales digitales, la autocorrelación muestra el elevado grado de independencia de las señales caóticas, entre distintas realizaciones y entre tramos de una misma señal. La estimación espectral es útil para determinar la aproximación de las señales caóticas a las señales estrictamente aleatorias, ya que se demuestra cómo modular en fase un pulso para que cubra un ancho de banda tal que pueda semejar a un ruido coloreado, que es el que se encuentra en comunicaciones.

En la señal financiera, se aprecia su carácter ergódico en autocorrelación, no así en la media. Esto, junto con el

hecho de que el espectro es claramente de banda estrecha, permite intrapolar y extrapolar los datos de la secuencia [5].

En cuanto a las distribuciones tiempo-frecuencia, el análisis indica en qué punto de una secuencia se alcanza el máximo grado caótico, que es el instante en el que el rango espectral es mayor. Además, muestra que la consideración caótica o no de una señal o sistema no depende de su mayor o menor ancho de banda, respectivamente, sino de la distribución uniforme o no de densidad de energía tiempo-frecuencia.

## Bibliografía

- [1] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, J.R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd Ed, Prentice Hall, (1999).
- [2] S. Quian y D. Chen, *Joint Time-Frequency Analysis*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall (1996).
- [3] A. González-Marcos, J.A. Martín-Pereda, Analysis of Irregular Behaviour on an Optical Computing Cell Array, *Optics & Laser Technology* 32, 457-466 (2000).
- [4] Salvador Rojí Ferrari, Ana González Marcos *Measurement And Analysis Of Indices And Stocks In The Spanish Stock Exchange Using The Lyapunov Exponent With Digital Technology*, Working Paper 246, Fundación De Las Cajas De Ahorros (Funcas), Publicación Marzo 2006.
- [5] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, 3rd Ed, Prentice Hall, (1997).

## On the reduced finite difference schemes of implicit type and its applications in Option Pricing

Antonio Falcó

*Departamento de Ciencias Físicas, Matemáticas y de la Computación*

*Universidad CEU Cardenal Herrera*

*San Bartolomé 55, 46115 Alfara del Patriarca (Valencia), Spain*

E-MAIL: [afalco@uch.ceu.es](mailto:afalco@uch.ceu.es)

WWW: <http://www.gsd.uab.es/personal/afalco>

COLABORADORES: Francisco Chinesta (Laboratoire de Mécanique des Systèmes & des Procédés, ENSAM - Paris) and Fernando Sánchez (Universidad CEU Cardenal Herrera)

## Introduction

The aim of the present work is to introduce the Model Reduction in the context of Finite Difference schemes of implicit type. In order to compute the approximate values for the solution of generic parabolic PDE, at the grid points we introduce the following vectors. Let  $\mathbf{u}^m = [u_1^m \ u_2^m \ \dots \ u_{N_x-1}^m]^T \in \mathbf{R}^{N_x-1}$  be the true solution of the PDE at time  $t_m$ , and set  $\mathbf{U}^m = [U_1^m \ U_2^m \ \dots \ U_{N_x-1}^m]^T \in \mathbf{R}^{N_x-1}$ , for the corresponding the approximation vector, where  $m = 0, 1, \dots, N_t$ .

Now, assume that by using a typical finite difference scheme of implicit type for equation we are to be able to

construct the following two-level difference equation

$$\begin{aligned} Q\mathbf{U}^{m+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{U}^m) + \mathbf{g}^m, \\ \mathbf{U}^0 &= \mathbf{u}^0. \end{aligned} \quad (1)$$

for  $m = 0, 1, \dots, N_t - 1$  (see for example [2] and Chapter 3 of [1]). The vector  $\mathbf{g}^m$  is usually constructed from values  $\{u_j^m : j = 0, N_x, m = 0, 1, \dots, N_t\}$  and  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^{N_x-1} \rightarrow \mathbf{R}^{N_x-1}$ . Here the matrix  $Q$  may depend on  $k_t$  and  $h_x$ . Thus, by solving this difference equation we obtain the matrix  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}^1 \ \mathbf{U}^2 \ \dots \ \mathbf{U}^{N_t}]$  which represents the approximate solution to the true one that, in matrix form, we can write as  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}^1 \ \mathbf{u}^2 \ \dots \ \mathbf{u}^{N_t}]$ .

### A model reduction method for finite difference schemes of implicit type

Now, we introduce a model reduction method to be used to reduce the finite-difference scheme of implicit type (1). We assume that in this case we can obtain the snapshots  $\mathbf{u}_s^{(m)} \in \mathbf{R}^{N_x-1}$ , for  $m = 0, 1, \dots, \hat{N}_t$ , (here  $\hat{N}_t$  is the snapshots number) either by experimental data or by previous computer simulation of a similar problem. Now, let the matrix

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s^{(1)} & \mathbf{u}_s^{(k)} & \dots & \mathbf{u}_s^{(\hat{N}_t)} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N_x-1) \times \hat{N}_t}.$$

By means the Singular Value Decomposition,  $\mathbf{u}_s$  can be decomposed as

$$\mathbf{u}_s = \sigma_1 \Psi_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \sigma_r \Psi_r \mathbf{v}_r^T.$$

where  $\{\Psi_1, \dots, \Psi_r\}$  and  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ , are orthonormal basis and  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r$  are the singular values (here  $r = \text{rank } \mathbf{u}_s$ ). Moreover, if  $\mathbf{v}_j = [v_j^1 \ \dots \ v_j^{N_x-1}]^T$ , this implies that

$$\mathbf{u}_s^{(k)} = \sum_{j=1}^r \sigma_j v_j^k \Psi_j$$

and this representation is optimal in the following sense. From the Schmidt-Eckart-Young-Mirsky Theorem a the unique minimizer of the problem

$$\min_{\mathbf{X}, \text{rank } \mathbf{X}=k} \|\mathbf{u}_s - \mathbf{X}\|_F$$

is given by

$$\mathbf{X}^* = \sigma_1 \Psi_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \sigma_k \Psi_k \mathbf{v}_k^T,$$

and  $\|\mathbf{u}_s - \mathbf{X}^*\|_F = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i$ , where  $\|\cdot\|_F$  denotes the Frobenius norm.

Now we construct a reduced finite-difference scheme by using the representative modes obtained by using the SVD of the matrix of representative data. To this end we consider the set of representative modes

$$\Psi^* = \text{span}\{\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_l\}$$

where  $l \ll N_x - 1$  is choosed by means the condition  $\sum_{i=1}^l \sigma_i / \sum_{i=1}^r \sigma_i > 0,9999$ . Then the reduced version of (1) is given by

$$\begin{aligned} Q|_{\Psi^*} \text{proj}_{\Psi^*}(\mathbf{U}^{m+1}) &= \text{proj}_{\Psi^*}(\mathbf{f}(\mathbf{U}^m) + \mathbf{g}^m), \\ \mathbf{U}^0 &= \mathbf{u}^0. \end{aligned} \quad (2)$$

for  $m = 0, 1, \dots, N_t - 1$ , and where  $\text{proj}_{\Psi^*}(\mathbf{z})$  denotes the coordinates of  $\mathbf{z}$  in the  $\Psi^*$ -basis. Note that in the reduced version we solve  $N_t$  linear systems with a  $l \times l$  coefficient matrix.

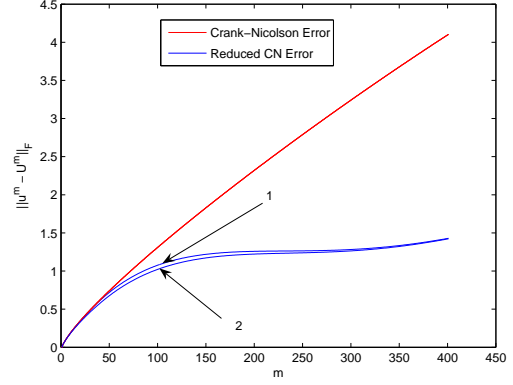


Fig. 1: The standard Crank-Nicolson scheme vs. a Reduced one using two different sets of snapshots.

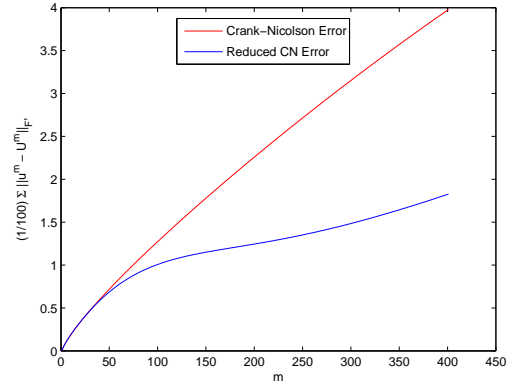


Fig. 2: In these cases we use the modes obtained by the twenty five first iterations of a Crank-Nicolson scheme with fixed parameters values.

### A numerical experiment

We compare the propagation errors in a standard Crank-Nicolson scheme vs. a Reduced one. To this end we borrow from [1] the following PDE

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - rx \frac{\partial u}{\partial x} + ru = 0 \text{ for } (x, t) \in [0, a] \times [0, T], \quad (3)$$

where  $u(x, 0) = \max(K - x, 0)$ ,  $u(0, t) = Ke^{-rt}$ ,  $u(a, t) = 0$ , here  $a \gg K$ . This PDE has a nice solution in closed form and it is well-known that the error of the numerical solutions is concentrated around  $x = K$  and it is increasing as  $t_m \rightarrow T$ . Let  $\hat{\mathbf{U}}^m$  be the numerical solution obtained by means of the proposed reduced finite difference scheme. In Figure 1 we plot, for  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 0,40$ ,  $K = 8$  and  $a = 16$  the errors  $\|\mathbf{u}^m - \mathbf{U}^m\|_F$  and  $\|\mathbf{u}^m - \hat{\mathbf{U}}^m\|_F$  for  $m = 0, 1, \dots, 400$ . In the curve with label 2 we use as snapshots  $\mathbf{u}_s^{(m)} = \mathbf{U}^m$  for  $m = 1, \dots, 25$ , the twenty five firsts iterations obtained by using the standard Crank-Nicolson scheme. On the other hand in the curve with label 1 we use as snapshots  $\mathbf{u}_s^{(m)} = \mathbf{u}^m$  for  $m = 1, \dots, 75$ , the

seventy five first iterations of the true solution. In both cases the number of modes are equal to five and we can see that the reduced method improves the approximation to the analytical solution.

Now, we will test how robust are the modes obtained in the later numerical experiment. To see this, we consider a hundred pairs of parameters values closed to  $r = 0,05$  and  $\sigma = 0,40$ . We generate its by means the formulas  $r_i = 0,05 + X_i$  and  $\sigma_i = 0,40 + Y_i$ , where  $X_i$  and  $Y_i$  are independent uniform random variables in  $[-0,02, 0,02]$ , and  $[-0,2, 0,2]$ , respectively for  $i = 1, 2, \dots, 100$ . For each  $(r_i, \sigma_i)$  we compute  $\mathbf{u}_i^m$ ,  $\mathbf{U}_i^m$  and  $\hat{\mathbf{U}}_i^m$  for  $i = 1, 2, \dots, 100$ . In Figure 2 we plot the mean errors  $(1/100) \sum_{i=1}^{100} \|\mathbf{u}_i^m - \mathbf{U}_i^m\|_F$  and  $(1/100) \sum_{i=1}^{100} \|\mathbf{u}_i^m - \hat{\mathbf{U}}_i^m\|_F$  for  $m = 0, 1, \dots, 400$ . As we can see the behaviour is similar to the above experiment and this fact allow to us to assert that the reduced basis are robust against small variations of the parameters values.

## Bibliografía

- [1] Y. Achdou and O. Pironneau. *Computational Methods for Option Pricing*. Frontiers in Applied Mathematics. SIAM, (2005)
- [2] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, (1995).

---

## Sesión 14: Dinámica cardiaca

Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)

Modera: Alfonso Bueno

---

### Causes of tachycardia in patients with Brugada syndrome: a simulation study.

Blas Echebarria  
*Departament de Física Aplicada*  
*Universitat Politècnica de Catalunya*  
 08028 - Barcelona

E-MAIL: blas@fa.upc.edu  
 WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa/eupb>

COLABORADORES: Inma R. Cantalapiedra and Angelina Peñaranda (Física Aplicada, UPC, 08028 - Barcelona)

Brugada syndrome is associated with an abnormal electrocardiogram (ECG), characterized by an elevation of the ST-segment. Since its discovery in 1992, it has gained increasing recognition, and today is believed to be responsible for 4% to 12% of all sudden deaths and around 20% of deaths in patients with structurally normal heart. Recently it has been discovered that it is caused by a mutation in a specific gene (SCN5A), resulting in dysfunction of the sodium channel in the membrane of cardiac cells. However, the link between this channelopathy and the occurrence of

arrhythmias or ventricular fibrillation is, as yet, not completely understood. To gain some insight into this point, we will perform simulations of the propagation of the action potential, in both one dimensional strands of tissue, and two-dimensional slices. We will use a detailed ionic model (Luo-Rudy II) of the transmembrane potential, with a modified sodium dynamics to mimic Brugada syndrome. With its help, possible mechanisms for the induction of reentrant waves (spirals) will be discussed. In particular, we will study the conditions for possible reexcitations and show that calcium currents play a fundamental role.

---

### La entropía muestral en el dominio wavelet predice la terminación de arritmias cardíacas supraventriculares

Raul Alcaraz Martínez  
*Grupo de Innovación en Bioingeniería (GIBI)*  
*Universidad de Castilla-La Mancha*  
 Cuenca (España)

E-MAIL: [raul.alcaraz@uclm.es](mailto:raul.alcaraz@uclm.es)  
 WWW: <http://eupc.uclm.es>

COLABORADORES: José Joaquín Rieta (Biomedical Sinergy, UPV), Jorge Mateo (GIBI), Carlos Vayá (GIBI), César Sánchez (GIBI)

Actualmente los mecanismos que provocan la reversión espontánea de episodios de fibrilación auricular paroxística son poco conocidos [1, 2]. El propósito de este trabajo es intentar discriminar, a partir del estudio del ECG de superficie, entre episodios con terminación espontánea y sin ella. La metodología propuesta para ello consiste, en primer lugar, en obtener la actividad auricular mediante la cancelación del complejo QRS y la onda T [3] para, posteriormente, descomponer mediante wavelets dicha señal en diferentes coeficientes de detalle y aproximación [4], y en segundo lugar, a través del análisis de entropía muestral [5], calcular índices de regularidad de la reconstrucción de ciertos coeficientes.

La validación de este algoritmo se ha realizado mediante las señales del Physionet/Challenge 2004 [6], obteniéndose que los episodios que terminan presentan un menor valor de entropía muestral con respecto a los que no terminan, lo que concuerda con el hecho ampliamente aceptado de que la organización de las señales de fibrilación auricular aumenta justo antes de la reversión [2]. Además se ha obtenido que ambos grupos son estadísticamente distinguibles, dado que la significación estadística obtenida por la t-student es igual a 0.001 y el 90% de las señales ciegas proporcionadas son correctamente clasificadas.

Estos resultados hacen pensar que este nuevo método puede mejorar la eficiencia de las técnicas clásicas de discriminación basadas en la frecuencia [7] y puede ayudar a comprender los mecanismos de la fibrilación auricular.

## Bibliografía

- [1] J. Kneller, J. Kalifa, R. Q. Zou, A. V. Zaitsev, M. Warren, O. Berenfeld, E. J. Vigmond, L. J. Leon, S. Nattel, J. Jalife. *Mechanisms of atrial fibrillation termination by pure sodium channel blockade in*

- an ionically-realistic mathematical model.* Circulation Research **96**(5),E35–E47 (2005).
- [2] A. Bollmann, D. Husser, L. Mainardi, F. Lombardi, P. Langley, A. Murray, J. J. Rieta, J. Millet, S. B. Olsson, M. Stridh, L. Sörnmo. *Analysis of surface electrocardiograms in atrial fibrillation: Techniques, research and clinical applications.* Europace, **8**(11), 911–926 (2006).
- [3] J. Slocum, A. Sahakian, S. Swiryn. *Diagnosis of atrial fibrillation from surface electrocardiograms based on computer-detected atrial activity.* Journal of Electrocardiology **25**(1), 1–8 (1992).
- [4] P. S. Addison. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook.* 1st edition. Taylor & Francis, 2001.
- [5] J. S. Richmann, J. R. Moorman. *Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy.* Am J Physiol Heart Circ Physiol **278**, 2039–2049 (2000).
- [6] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C. K. Peng, H. E. Stanley. *PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals.* Circulation **101**(23), e215–e220 (2000).
- [7] S. Petrutiu, A. V. Sahakian, J. Ng, S. Swiryn. *Analysis of the surface electrocardiogram to predict termination of atrial fibrillation: the 2004 computers in cardiology/physionet challenge.* Computers in Cardiology **31**, 105 – 108 (2004).

---

## Modelling the heart rate kinetics in response to exercise as a dynamical system

James R. Stirling

*Facultad de Ciencias de la Actividad Física y del Deporte  
Universidad Politécnica de Madrid  
Avda. Martín Fierro s/n. 28040a  
Madrid*

E-MAIL: [jr.stirling@upm.es](mailto:jr.stirling@upm.es)

WWW: <http://www.geocities.com/jamesrstirling>

COLABORADORES: Maria S. Zakyntinaki (Universitat Autònoma de Barcelona)

We model the heart rate kinetics in response to various exercise intensities as a dynamical system. We assume that the rate of increase in heart rate,  $hr(v, t)$ , is a function of the current value  $hr(v, t)$ , the intensity of the exercise (ie. the speed  $v$ ) and time  $t$ . Our model consists of a set of nonlinear coupled ordinary differential equations for  $hr(v, t)$  and  $\dot{v}$ . In our model we make use of and focus on the physiological fact that the rate of increase of the heart rate kinetics goes to zero on three specific occasions: a) when the heart rate has its minimum value,  $hr = hr_{min}$ , b) when the heart rate has its maximum value,  $hr = hr_{max}$  and c) when the heart rate has reached the heart rate demand of the particular exercise,  $hr(v, t) = D(v, t)$ . These three conditions are the fixed points of our model. We solve for the linear stability of these fixed points to find how orbits nearby behave and also to investigate the range of the values of the parameters of the model. The model is

applied to a set of experimental time series data and a stochastic optimization routine is used to fit the model parameters to the data. The parameter values found via the optimization routine provide an excellent fit for the range of heart rate demands we have data for. The model's parameters play a very important role as they are characteristic of the particular subject and their current fitness level.

---

## Sesión 15: Química no lineal

Jueves 7 de Junio (11:30–12:30)

Modera: Pedro Fernández de Córdoba

---

### Caracterización del estado de transición de la reacción de isomerización: $\text{LiNC} \leftrightarrow \text{LiCN}$ en 3D

Jesús F. Palacián

*Universidad Pública de Navarra*

*Departamento de Ingeniería Matemática e Informática*

*Campus de Arrosadía*

*31006 - Pamplona, Navarra*

E-MAIL: [palacian@unavarra.es](mailto:palacian@unavarra.es)

WWW: <http://www.unavarra.es>

COLABORADORES: R. M. Benito (Universidad Politécnica de Madrid), F. Borondo (Universidad Autónoma de Madrid), M. Iñarrea (Universidad de La Rioja), V. Lanchares (Universidad de La Rioja), J. C. Losada (Universidad Politécnica de Madrid), A. I. Pascual (Universidad de La Rioja), J. P. Salas (Universidad de La Rioja), P. Yanguas (Universidad Pública de Navarra)

En este trabajo abordamos el estudio de la isomerización de la molécula de LiCN [1]. Partimos de un potencial analítico en tres grados de libertad, que tiene un punto de equilibrio asociado de tipo  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}$  ( $\mathcal{C}$ =centro y  $\mathcal{S}$ =silla), es decir, que existe una dirección reactiva y dos no reactivas. Nuestro objetivo es el cálculo de variedades invariantes normalmente hiperbólicas (NHIMs), el estado de transición (TS) y su posterior análisis. Utilizamos formas normales para calcular analíticamente todos los objetos geométricos que intervienen en el proceso. Mediante esta técnica, pasamos, en ausencia de resonancias, del sistema original de 3 grados de libertad a un sistema reducido con 0 grados de libertad. A través de la inversión de la forma normal somos capaces de construir tres integrales asintóticas del sistema de partida. De este modo obtenemos expresiones analíticas de la NHIM tridimensional del sistema original, junto con sus variedades estable e inestable y el TS. Calculamos trayectorias que comienzan en la NHIM en la superficie de energía en dimensión 5 y determinamos trayectorias, tanto en las variedades progradadas o retrógradadas estables, como en las inestables asociadas a la NHIM. Una vez calculada la forma normal, estas trayectorias se obtienen fácilmente a partir de ella. Al contar con las expresiones analíticas de todas las variedades, tenemos control absoluto sobre la dinámica que tiene lugar cerca del estado de transición en este sistema de 3 grados de libertad [2, 3].

## Bibliografía

- [1] F. Borondo and R. M. Benito, *Quantum chaos in floppy molecular systems: the LiCN molecule*, in *Nonlinear Dynamics and Fundamental Interactions*, NATO Science Series vol. 213, F. Khanna and D. Matrasulov (eds.) (Springer, Dordrecht, 2006).
- [2] C. Jaffé, S. Kawai, J. Palacián, P. Yanguas and T. Uzer, *A new look at the transition state: Wigner's dynamical perspective revisited*, *Geometrical Structures of Phase Space in Multidimensional Chaos, Part A: A Special Volume of Advances in Chemical Physics* **130**, 171–216 (2005).
- [3] T. Uzer, C. Jaffé, J. Palacián, P. Yanguas and S. Wiggins, *The geometry of reaction dynamics*, *Nonlinearity* **15**, 957–992 (2002).

---

### Estudio de la transferencia de energía en moléculas triatómicas mediante el análisis de frecuencias

Juan Carlos Losada

*Grupo de Sistemas Complejos*

*E.U. Arquitectura Técnica*

*Universidad Politécnica de Madrid*

*28040 - Madrid, España*

E-MAIL: [juancarlos.losada@upm.es](mailto:juancarlos.losada@upm.es)

COLABORADORES: C. G. Giralda (GSC-CIEMAT), (GSC-UPM), R. M. Benito (GSC-UPM), F. Borondo (Universidad Autónoma de Madrid)

Los procesos dinámicos que tienen lugar en una molécula aislada son fundamentales para determinar la reactividad de las mismas, que es el fin último de cualquier teoría química. A este respecto, al estudiar su movimiento interno, determinar cuales son los modos que se acoplan de una forma eficiente, a través de resonancias de Fermi, y como la energía fluye a su través, es una tarea importante en la Dinámica Molecular.

Cuando el sistema tiene dos grados de libertad existen herramientas matemáticas bien conocidas para su estudio, como por ejemplo la Superficie de Sección de Poincaré (SSP), que permiten describir con precisión, mediante cortes en el espacio de fases, las regiones donde aparece movimiento regular y caótico así como todo el universo descrito por Poincaré y el teorema KAM.

Sin embargo, cuando el sistema tiene más de dos grados de libertad (y por tanto el espacio de fases tiene más de tres dimensiones), la SSP ya no puede dar información relevante sobre la estructura del espacio de fases, ya que un plano (dos dimensiones), no separa regiones en espacios de más de tres dimensiones. La forma tradicional de abordar el estudio de estos sistemas ha sido laboriosa, mediante estudios locales de trayectorias determinadas, pero sin lograr una visión de conjunto del espacio de fases, y en particular sin poder determinar resonancias, islas de regularidad, fronteras de caos-regularidad, etc., así como información dinámica del comportamiento de la transferencia de energía entre modos de vibración.

A este respecto, el método del Mapa de Frecuencias (MF), originalmente desarrollado en el campo de la Mecánica Celeste, es de una especial relevancia. El MF

está basado en el cálculo de las frecuencias fundamentales del movimiento (existió una frecuencia fundamental de vibración por cada grado de libertad) y consiste en estudiar la variación de dichas frecuencias en función de la energía y condiciones iniciales del sistema. En este caso se estudia el movimiento del sistema, no en el espacio de fases, sino en el espacio de frecuencias.

Se presentan ejemplos para diversas moléculas triatómicas (LiCN, HCP, OH<sub>2</sub>, etc.), construyendo la correspondiente red de Arnold y discutiendo la difusión asociada y sus implicaciones dinámicas.

## Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Springer-Verlag, New York, 1978).
- [2] A. N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, 527 (1954); V. I. Arnold, *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.* **25**, 21 (1961); J. Moser, *Am. Math. Soc. Mem.* **81**, 1 (1968).
- [3] V. I. Arnold, *Sov. Math. Dokl.* **5**, 581 (1964).
- [4] J. Laskar, *Icarus* **88**, 266 (1990).
- [5] J. C. Losada, J. M. Estebanz, R. M. Benito, and F. Borondo, *J. Chem. Phys.* **108**, 63 (1998).
- [6] J. C. Losada, J. M. Estebanz, R. M. Benito y F. Borondo. *Int. J. of Bif. and Chaos* **9**, 12 (1999).
- [7] C. G. Giralda, J. C. Losada, R. M. Benito y F. Borondo. *8FFP Proc. American Institute of Physics* (en prensa).

---

### Ruido interno y la rotura espontánea de quiralidad molecular

David Hochberg

*Centro de Astrobiología (CSIC-INTA)*

*Ctra. de Torrejón a Ajalvir Km. 4*

*28850 Torrejón de Ardoz*

*Madrid*

E-MAIL: [hochberg@laeff.esa.es](mailto:hochberg@laeff.esa.es)

WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: María-Paz Zorzano

Un problema de especial importancia asociado con el origen de la vida es explicar cuál es la causa de que los enlaces entre los nucleótidos de RNA y DNA incorporen exclusivamente azúcares de la quiralidad D, mientras los encimas involucren amino ácidos de la otra quiralidad: L. La simetría especular está definitivamente rota en el mundo bioorgánico, y la vida tal y como la conocemos está relacionada con la homoquiralidad [1]. Partiendo de la ecuación maestra, utilizamos métodos de la teoría de campos para deducir rigurosamente las ecuaciones de Langevin que describen la dinámica estocástica del modelo clásico de Frank [2] de la amplificación quiral incluyendo difusión espacial. Presentamos resultados de una simulación numérica de estas ecuaciones estocásticas en dos dimensiones. Estas fluctuaciones multiplicativas conducen a una amplificación quiral absoluta partiendo de condiciones iniciales con iguales concentraciones de cada quiralidad (o sea, condiciones racémicas) [1]. Se ve claramente la formación de "colonias" quirales que compiten por los recursos. Pero el estado



final esta compuesto por una sola quiralidad (enantiómero). También surgen patrones estacionarios donde los dos enantiómeros co-existen en dos regiones separadas por una frontera racémica. Las fluctuaciones que conducen a estos estados asintóticos son consecuencia natural del hecho de que en general, las reacciones químicas están limitadas por la difusión.



Fig. 1: De izquierda a derecha: la formación de colonias homquirales separadas por fronteras racémicas.

## Bibliografía

- [1] V. Avetisov and V. Goldanskii, *Mirror symmetry breaking at the molecular level*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93**, 11435–11442 (1996).
- [2] F.C. Frank, *On spontaneous asymmetric synthesis*, Biochim. et Biophys. Acta **11**, 459–463 (1953).
- [3] D. Hochberg and M.-P. Zorzano, *Reaction-noise induced homochirality*, Chem. Phys. Lett. **431**, 185–189 (2006).

---

## Sesión 16: Caos en sistemas dinámicos

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Amadeu Delshams

---

### Una nota sobre sistemas dinámicos discretos caóticos e infinitamente derivables

Juan Luis García Guirao  
 Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
 Universidad Politécnica de Cartagena  
 Hospital de Marina  
 30203 - Cartagena, España

E-MAIL: [juan.garcia@upct.es](mailto:juan.garcia@upct.es)  
 WWW: <http://www.dmae.upct.es/~jlguirao>

COLABORADORES: F. Balibrea (Universidad de Murcia),  
 M. A. López (Universidad de Castilla-La Mancha)

Los sistemas dinámicos discretos generados por funciones de clase  $C^\infty$ , en particular los dados por polinomios, constituyen la base de modelización de numerosos fenómenos de la biología, la ingeniería e incluso de las ciencias sociales. El objetivo de la presente contribución es mostrar un método que permite construir sistemas transitivos, por ende caóticos, en el intervalo

que poseen una cantidad finita de puntos fijos pre-determinada de antemano. Mostraremos que esta construcción tiene consecuencias en el problema de la supresión del comportamiento caótico de este tipo de sistemas.

---

### Caos distribucional para operadores en espacios de sucesiones

Alfred Peris  
 Departament de Matemàtica Aplicada  
 Universitat Politècnica de València  
 Camí Vera S/N  
 46021 València

E-MAIL: [aperis@mat.upv.es](mailto:aperis@mat.upv.es)  
 WWW: <http://personales.upv.es/aperis/>

COLABORADORES: F. Martínez Giménez (València), P. Oprocha (Kraków)

Existen varios aspectos que son susceptibles de ser aceptados como nociones de caos en sistemas dinámicos discretos. Originalmente Li y Yorke [2] introdujeron el término caos en un sistema dinámico discreto  $(X, f)$  como la existencia de conjuntos no numerables  $S \subset X$ , llamados conjuntos ‘scrambled’, tales que para todo par  $x, y \in S$  ( $x \neq y$ ), se cumple que  $\liminf_n d(f^n x, f^n y) = 0$ , pero  $\limsup_n d(f^n x, f^n y) > 0$ , donde  $d$  es la distancia prefijada en  $X$ . Esta condición establece que las órbitas de elementos de  $S$  tienen un comportamiento bastante independiente unas de otras.

Una noción más estricta, introducida por Schweizer y Smítal [4], requiere que además podamos ‘contar’ las iteraciones que se ‘acercan’ entre sí y las que se ‘separan’ (en términos de densidad en el conjunto de los números naturales), de manera que para ‘muchas’ iteraciones  $n$  se cumpla que  $f^n x$  y  $f^n y$  están muy próximos, y también para muchos  $n$  se cumpla que  $f^n x$  y  $f^n y$  están lo suficientemente separados. Este es el concepto de caos distribucional.

En un artículo reciente de Oprocha [3] se prueba que el operador de anulación asociado al oscilador armónico cuántico tiene un comportamiento caótico en el sentido distribucional. En un artículo previo de Gulishasvili y MacCluer [1] demuestran que el operador de anulación del oscilador armónico cuántico es caótico en el sentido de Devaney, es decir, el conjunto de puntos periódicos es denso y existen elementos en el espacio cuya órbita es densa.

Dicho operador pertenece a una clase bastante amplia de operadores en espacios de sucesiones, concretamente los operadores de desplazamiento a izquierda. Nosotros estudiamos esa clase general de operadores y probamos que cuando se cumple el caos en sentido de Devaney, también se produce el caos distribucional. Por otra parte obtenemos una condición computable que establece el caos distribucional para dicha clase de operadores, mostrando ejemplos de operadores que son caóticos en el sentido distribucional, pero no Devaney.

## Bibliografía

- [1] A. Gulishasvili and C. R. MacCluer, *Linear chaos in the unforced quantum harmonic oscillator*, J. Dyn. Syst. Meas. Control **118** 337–338 (1996).

- [2] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 985–992 (1975).
- [3] P. Oprocha, *A quantum harmonic oscillator and strong chaos*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 14559–14565 (2006).
- [4] B. Schweizer and J. Smítal, *Measure of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems of interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** 737–754 (1994).

---

## Caos en el acoplamiento de dos Brusselators

Fátima Drubi Vega  
 Universidad de Oviedo  
 Dpto. de Matemáticas  
 Facultad de Ciencias  
 33007 - Oviedo, Principado de Asturias

E-MAIL: drubifatima.uo@uniovi.es  
 WWW: <http://orion.ciencias.uniovi.es/~mesa/grupodin/>

COLABORADORES: Santiago F. Ibáñez Mesa (Univ. de Oviedo), J. Ángel Rodríguez Méndez (Univ. de Oviedo)

El interés por el estudio de los sistemas acoplados comienza con la publicación de un artículo de A. Turing [1] en el que se plantea la posibilidad de generar comportamientos periódicos mediante acoplamientos, un tema de gran interés por su relación con la existencia de patrones dinámicos en el contexto de la morfogénesis. Motivados por estas primeras ideas se publican otros trabajos en esta línea (ver [2, 4, 3]). Nuestro interés se centra en comprender como se llega a la complejidad (comportamiento caótico) acoplando mediante difusión lineal sistemas dinámicos con una dinámica interna simple, por ejemplo, puntos de equilibrio u órbitas periódicas globalmente asintóticamente estables. En [5] probamos analíticamente la existencia de atractores extraños en una familia que se obtiene mediante el acoplamiento por difusión lineal de dos Brusselators (modelo bien conocido para una reacción química). Completamos este resultado teórico con un análisis numérico que nos permite ilustrar gráficamente la existencia de estos atractores extraños en dicho acoplamiento.

## Bibliografía

- [1] A. Turing, *The chemical basis of the morphogenesis*, Philos. Trans. Roy. Soc. B, **237**, 37–72 (1952).
- [2] S. Smale, *A mathematical model of two cells via Turing's equation*, Lectures on Math. in the Life Sciences, Vol. **6**, Amer. Math. Soc. (1974).
- [3] J. C. Alexander, *Spontaneous oscillations in two 2-component cells coupled by diffusion*, J. Math. Biol., **23**(2), 205–219 (1986).
- [4] L. N. Howard, *Nonlinear oscillations*, Lectures in Appl. Math., **17**, 1–67 (1979).
- [5] F. Drubi, S. F. Ibáñez and J. A. Rodríguez, *Coupling leads to chaos*, enviado a Journal of Differential Equations.

---

## Sesión 17: Procesado de imágenes y visión

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Sergio Amat

---

### Comparing noise reduction techniques for visual reflected glare

Manuel Sillero Quintana  
 Facultad de Ciencias de la Actividad Física y del Deporte  
 Ciudad Universitaria de Madrid  
 Avda. Martín Fierro s/n  
 28040 - Madrid

E-MAIL: [manuel.sillero@upm.es](mailto:manuel.sillero@upm.es)  
 WWW: [http://www.inef.upm.es/profesores/manuel\\_sillero.htm](http://www.inef.upm.es/profesores/manuel_sillero.htm)

COLABORADORES: Celia Sánchez-Ramos, Inma Moral-Martínez, Antonio Langa, María Jesús Pérez

Vision can be thought of as a dynamical system, whereas Mischler [1] defines glare as a form of visual noise. In this presentation we focus on techniques for preventing disability glare on planar horizontal surfaces. This is a glare which results in a reduced ability to obtain the visual information required for a particular activity due to decreased contrast and visibility. We present two experiments [2] in which we analyze the effectiveness of different techniques for filtering reflected glare. The techniques we investigated consist of an optical form of real time noise reduction in which the aim is to minimize the information loss.

## Bibliografía

- [1] G. Mischler *Lighting Design Glossary*, Lighting Design Knowledgebase (1998).
- [2] C. Sánchez-Ramos, I. Moral-Martínez, A. Langa, M. J. Pérez, M. Sillero, *Effectiveness of polarizing versus colored filters for improving contrast sensitivity under conditions of reflected central glare*, submitted (2007).
- [3] M. Sillero Quintana, I. Refoyo Román, A. Lorenzo Calvo, J. Sampedro Molinuevo *Perceptual visual skills in young highly skilled basketball players*, Perceptual and motor skills, to appear (2007).

---

### Eliminación de ruido en imágenes de color utilizando técnicas no lineales

Juan Carlos Trillo  
 Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
 Universidad Politécnica de Cartagena  
 30203, Cartagena (Murcia)

E-MAIL: [jctrillo@upct.es](mailto:jctrillo@upct.es)  
 WWW: <http://www.dmae.upct.es/~jcarlos>

COLABORADORES: Sergio Amat, Juan Ruiz

En los últimos años la investigación dentro del campo de procesamiento de imágenes digitales ha crecido mucho.

Se usan diferentes herramientas, que en su mayoría tienen su fundamento en conceptos matemáticos más o menos complejos. Una de estas herramientas son las transformaciones de multirresolución (ver [1, 2, 3]), las cuales se aplican en particular a la compresión y a la eliminación de ruido en imágenes digitales.

Nuestro objetivo es presentar una clase de transformaciones de multirresolución no lineales y aplicarlas para la eliminación de ruido en imágenes de color. Dichas transformaciones están basadas en una adaptación y mejora del esquema propuesto en [4, 5], y suponen otra alternativa al uso de técnicas lineales.

## Bibliografía

- [1] A.Harten, *Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets*, J. Appl. Numer. Math. **12**, 153–192 (1993).
- [2] A.Harten, *Multiresolution representation of data II*, SIAM J. Numer. Anal. **33(3)**, 1205–1256 (1996).
- [3] F.Aràndiga and R.Donat, *Nonlinear Multi-scale Decompositions: The Approach of A.Harten*, Numerical Algorithms **23**, 175–216 (2000).
- [4] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, and J.C. Trillo, *Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing*, Foundations of Computational Mathematics **6(2)**, 193–226 (2006).
- [5] S. Amat, H. Cherif, and J.C. Trillo, *Denoising using Linear and Nonlinear Multiresolutions*, Engineering Computations **22(7)**, 877–891 (2005).

---

## Restauración de imágenes mediante difusión no lineal con condición de parada basada en los coeficientes wavelet

Francisco Rodenas  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*Universidad Politécnica de Valencia*  
*46022-Valencia, España*

E-MAIL: frodenas@mat.upv.es

COLABORADORES: Patricia Mayo, Damián Ginestar y Gumersindo Verdú

Un tipo importante de técnicas para reducción de ruido en imágenes digitales está basada en la utilización de la ecuación de difusión no lineal [1, 2]. Ésta se implementa como un filtro que se aplica a la imagen de forma iterativa un número determinado de veces, de manera que en cada paso se obtiene una versión suavizada de la imagen anterior. Los métodos basados en filtros lineales tienden a emborronar los bordes de la imagen mientras que los filtros no lineales producen un emborronamiento menor, preservando así las características fundamentales de la imagen.

Un punto clave en la aplicación de ecuaciones de evolución a imágenes consiste en la determinación de en qué punto detener la difusión. Si el filtro difusivo se aplica un número insuficiente de veces no se eliminará la cantidad de ruido deseada, mientras que si se aplica demasiadas veces, la imagen resultante estará demasiado suavizada pudiendo haberse perdido parte de la información importante de la

imagen. Así pues, el estudio de las condiciones de parada de la ecuación de difusión en la restauración de imágenes digitales es un campo de investigación de gran interés.

En el presente trabajo proponemos una condición de parada basada en la estimación del ruido de la imagen propuesta por Donoho [3]. Dicho valor se calcula a partir de los valores de los coeficientes de la transformada wavelet de la imagen.

Supongamos que la imagen observada proviene de una imagen libre de ruido contaminada por un ruido aditivo gaussiano, en este caso, la imagen observada se describe como una función real con valores reales  $f(x, y)$  definida en el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , donde supondremos que  $f(x, y)$  es la suma de una imagen ideal libre de ruido  $\tilde{f}(x, y)$  a la que se le ha añadido un ruido gaussiano  $n(x, y)$  de media cero y desviación típica uno:

$$f(x, y) = \tilde{f}(x, y) + n(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1)$$

La formulación estándar del problema de difusión aplicado a la imagen  $f(x, y)$  tiene la siguiente estructura: A partir de  $f(x, y)$ , se obtiene una familia uniparamétrica de imágenes  $u(x, y, t)$  (siendo  $t \in [0, +\infty]$  el parámetro temporal) al resolver la ecuación de difusión tomando como estado inicial la imagen original  $f(x, y)$  e imponiendo condiciones de reflexión en el contorno:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \nabla \cdot (g(\|\nabla u\|) \cdot \nabla u), \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u &= 0 \quad \text{en la frontera } \partial\Omega, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{n}$  denota el vector normal a  $\partial\Omega$  y la función  $g(\|\nabla u\|) \geq 0$  llamada difusividad controla el nivel de difusión realizada. Dependiendo de la elección de la función  $g$  se obtienen diferentes filtros difusivos.

La elección de una determinada  $g$  para el filtrado de la imagen depende del objetivo que se pretenda alcanzar. Aquí hemos considerado una difusividad que ha demostrado ser válida para la reducción de ruido de forma eficiente en imágenes y con las propiedades adecuadas para que la solución sea estable bajo perturbaciones de las condiciones iniciales y de los parámetros. Para los experimentos se ha utilizado la función:

$$g(\|\nabla u\|) = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \|\nabla u\|^2}} + \epsilon, \quad (3)$$

donde  $\alpha, \beta$  y  $\epsilon$  son parámetros positivos. No entramos ahora en la discusión sobre la elección de los valores para dichos parámetros.

El filtro difusivo correspondiente se obtiene discretizando la ecuación (2) tanto espacial como temporalmente. Cada paso discreto de tiempo puede verse como la aplicación de un filtro que produce una familia de imágenes  $u(x, y, t_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$ ), que son versiones filtradas de la imagen original.

Si el objetivo del filtrado consiste en la reducción del ruido presente en la imagen, se ha de detener el proceso antes de que el proceso difusivo afecte de forma importante a la señal. Existen en la literatura varias propuestas para calcular un tiempo de parada [4, 5, 6]. Nosotros aquí proponemos estimar el ruido remanente en la imagen después de cada filtrado difusivo mediante la estimación de Donoho [3]. La varianza del ruido añadido a la imagen puede estimarse a partir de los coeficientes wavelet mediante:

$$\sigma^2 = \frac{\text{mediana}|d_{ij}|}{0,6745} \quad (4)$$

siendo  $d_{ij}$  los coeficientes de la transformada wavelet discreta de  $f(x, y)$  correspondientes a la subseñal de detalles diagonales, usualmente denotada por  $HH1$ .

El proceso seguido para la restauración de una imagen consiste en los siguientes pasos:

- Cálculo de la transformada wavelet de nivel uno de la imagen observada (ruidosa)  $f(x, y)$ .
- Aplicación del filtro difusivo no lineal a dicha transformada, obteniendo una familia de señales  $w(x, y, t_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$ ).
- Cálculo en cada paso del estimador (4), obteniendo una serie de valores  $\sigma(t_k)$ .
- Estimación del instante de parada  $T$  del proceso difusivo a partir de la evolución de los valores de  $\sigma(t_k)$ .
- Cálculo de la transformada wavelet inversa de  $w(x, y, T)$ , que será la imagen restaurada.

Los resultados experimentales son bastante esperanzadores y esta forma de estimar un tiempo de parada está al nivel, en cuanto a eficiencia, de otros estimadores introducidos desde otros puntos de vista [4, 5, 6].

## Bibliografía

- [1] F. Catté, P. Lions, J. Morel and T. Coll, *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion*, SIAM Numerical Analysis **29** (1992), 182-193.
- [2] J. Weickert, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, ECMI Series, Teubner, Stuttgart, 1998.
- [3] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage*, Biometrika **81** (1994), 425-455.
- [4] J. Weickert, *Coherence-enhancing diffusion of colour images*, Image and Vision Computing **17**(3-4) (1999), 201-212.
- [5] P. Mrázek and M. Navara, *Selection of optimal stopping time for nonlinear diffusion filtering*, International Journal of Computing Vision **52**(2-3) (2003), 189-203.
- [6] G. Gilboa, N. Sochen and Y. Y. Zeevi, *Estimation of Optimal PDE-based Denoising in the SNR Sense*, to appear in IEEE Transactions on Image Processing. (2006).

---

## Sesión 18: Dinámica poblaciones

Jueves 7 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Rafael Bravo

---

### Persistencia y estabilidad global en sistemas depredador-presa con retraso.

Clotilde Martínez  
 Departamento de Matemática Aplicada  
 Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
 Universidad de Granada  
 18071 - Granada

E-MAIL: [clotilde@ugr.es](mailto:clotilde@ugr.es)

COLABORADORES: Manuel Gámez (Departamento de Estadística y Matemática Aplicada, Universidad de Almería)

Este trabajo proporciona condiciones suficientes para la persistencia y extinción en sistemas depredador-presa con retraso no autónomos en los que los coeficientes son funciones continuas y acotadas.

A diferencia de otros resultados publicados sobre estos sistemas, nuestros resultados siguen siendo válidos para retrasos no finitos distribuidos de forma continua. Es fundamental para ello la elección del correspondiente espacio de fases.

Asimismo, establecemos condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad global del equilibrio positivo para sistemas autónomos. Una característica importante de tales condiciones es que son independientes de la longitud de los retrasos considerados. Además pueden verse como una extensión de otras condiciones ya conocidas para sistemas con retrasos discretos.

Se muestran ejemplos de sistemas en los que para ciertos valores del retraso existe un equilibrio inestable con oscilaciones periódicas.

---

### Cuasiespecies virales en 2 dimensiones: efectos de la difusión en la competencia y la diversidad

Jacobo Aguirre Araujo  
 Centro de Astrobiología (CSIC-INTA)  
 Ctra. de Ajalvir km. 4,  
 28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)

E-MAIL: [aguirrea@inta.es](mailto:aguirrea@inta.es)  
 WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: Susanna C. Manrubia (Centro de Astrobiología (CSIC-INTA))

En el contexto de la teoría de cuasiespecies [1], se presentó en 2003 un modelo discreto para la evolución de poblaciones de replicadores con alta tasa de mutación [2]. Dicho modelo reproduce satisfactoriamente el crecimiento exponencial de dichas poblaciones y su tendencia hacia una distribución de equilibrio para su heterogeneidad fenotípica, ambos fenómenos observados experimentalmente en virus de RNA cuando se encuentran en medio líquido (donde se aplica la aproximación de campo medio). A su vez, y recientemente, se utilizó dicho modelo para el estudio de la competición entre diferentes poblaciones heterogéneas [3], dando soporte teórico a la observación experimental de que en ciertas circunstancias, poblaciones de baja viabilidad pueden desplazar a otras más viables si éstas se encuentran fuera del equilibrio [4].

Avanzando en esta línea de trabajo, presentamos ahora el estudio de la expansión de una población de cuasiespecies en 2 dimensiones, utilizando el modelo estudiado en [2, 3] y aplicando la técnica de los autómatas celulares. A pesar de la complejidad del crecimiento, ahora lineal y circunscrito a la frontera que separa a la población del medio circundante, mostramos que es posible caracterizar analíticamente la dinámica del sistema mediante una matriz cuyos elementos son las probabilidades de transición entre los diferentes estados fenotípicos. A diferencia, sin embargo, del caso de campo medio previamente estudiado, la difusión y los fenómenos locales de correlación resultan ser efectos de importancia, y uno de los objetivos de este trabajo es el estudio de su influencia sobre la evolución del crecimiento viral.

Para la comprobación experimental de los resultados analíticos y computacionales obtenidos, se podría hacer uso del desarrollo de placas de lisis producidas por virus en agar semisólido, donde la difusión de las partículas virales puede ser variada dependiendo de la concentración del agar.

## Bibliografía

- [1] M. Eigen, *Selforganization of matter and the evolution of biological macromolecules*, Naturwissenschaften **58**, 465 (1971).
- [2] S. C. Manrubia, E. Lázaro, J. Pérez-Mercader, C. Escarmís y E. Domingo, *Fitness distributions in exponentially growing asexual populations*, Phys. Rev. Lett. **90**, 188102 (2003).
- [3] J. Aguirre y S. C. Manrubia, *Out-of-equilibrium competitive dynamics of quasispecies*, Europhys. Lett. **77**, 38001 (2007).
- [4] J. C. de la Torre y J. J. Holland, *RNA virus quasispecies populations can suppress vastly superior mutant progeny*, J. Virol **64**, 6278 (1990).

---

## Metasoluciones en dinámica de poblaciones

Santiago Cano Casanova  
 Universidad Pontificia Comillas  
 Escuela Técnica Superior de Ingeniería - ICAI  
 Alberto Aguilera, 25  
 28015 - Madrid, Spain

E-MAIL: scano@dmc.icai.upcomillas.es

COLABORADORES: Julián López-Gómez (Universidad Complutense)

Consideraremos el problema de reacción difusión de tipo logístico dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u - a(x)h(u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0 > 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$\Omega := \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < R\}, \quad R > 0,$$

$u_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , y el potencial  $a(x)$  es de la forma

$$a(x) := f(\text{dist}(x, \Omega_0)),$$

siendo

$$\Omega_0 := \{x \in \mathbf{R}^N : r < |x| < R\}, \quad R > r > 0,$$

y  $f \in \mathcal{C}^1[0, R - r]$  una función que verifica

$$f(0) = 0, \quad f'(t) \geq 0, \quad t > 0.$$

Por otra parte, supondremos que  $h \in \mathcal{C}^1[0, \infty)$  satisface

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad h'(u) > 0, \quad u > 0$$

que  $\frac{h(u)}{u}$  es creciente en  $u$  y que para algún  $p > 1$ ,

$$\lim_{u \uparrow \infty} \frac{h(u)}{u^p} = A > 0.$$

El objetivo de la comunicación será discutir la dinámica de las soluciones positivas de (1) para todos los valores de  $\lambda \in \mathbf{R}$ , obteniendo los perfiles límite hacia los que tienden las soluciones de dicho problema cuando  $t$  tiende a infinito. En dicha discusión, se analizarán los subdominios de  $\Omega$  y los valores de  $\lambda \in \mathbf{R}$ , para los que hay blow-up (crecimiento a infinito) de las soluciones de (1) con el paso del tiempo.

En la dinámica de las soluciones de (1), que está gobernada por los estados de equilibrio (clásicos y "no clásicos") del problema elíptico asociado, juegan un papel esencial las denominadas *metasoluciones* de la ecuación

$$-\Delta u = \lambda u - a(x)h(u) \quad (2)$$

en el dominio

$$D = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0 = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < r\},$$

que son aquellas soluciones  $\theta(x)$  de (2) en  $D$ , que verifican

$$\begin{aligned} \lim_{x \in D} \theta(x) &= \infty, \\ d(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde  $d(x) = \text{dist}(x, \partial D)$ . Estos resultados han sido ampliamente estudiados en [5],[6],[7],[8],[9],[10] y [11], entre otros, remontándose el interés de este tipo de problemas a los trabajos pioneros de [3] y [4], y las cotas para el problema elíptico asociado, a los trabajos pioneros de [1] y [2]. La novedad de los resultados presentados en la comunicación, radicarán en la obtención de la tasa exacta de blow-up -cuando y donde lo haya- de las soluciones de (1), en función de  $A$ ,  $p$  y  $f$ , para un término de reacción  $h(u)$  tan general como el considerado. Dichos resultados constituyen una extensión de los previamente obtenidos en [12].

## Bibliografía

- [1] J.B.Keller, *On solutions of  $\Delta u = f(u)$* , Communications on Pure Applied Mathematics **X**, 503–510 (1957).
- [2] R. Osserman, *On the inequality  $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Mathematics **7**, 1641–1647 (1957).
- [3] J.M.Fraile, P.Koch Medina, J.López-Gómez y S. Merino, *Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation*, Journal of Differential Equations **127-Nº1**, 295–319 (1996).
- [4] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J.López-Gómez y J.C.Sabina de Lis, *Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs*, Arch. Rational Mech. Anal. **145**, 261–289 (1998).
- [5] J. López-Gómez, *Large solutions, metasolutions, and asymptotic behaviour of the regular positive solutions of sublinear parabolic problems*, Electronic Journal of Differential Equations **Conf. 05**, 135–171 (2000).
- [6] Y.Du y Q.Huang, *Blow-up solutions for a class of semilinear elliptic and parabolic problems*, SIAM J. Math. Anal. **31**, 1–18 (1999).
- [7] J.García-Melián, R.Letelier-Albornoz y J.C. Sabina de Lis, *Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up*, Proc. Amer.Math.Soc. **129**, 3593–3602 (2001).

- [8] R. Gómez-Reñasco y J. López-Gómez, *On the existence and numerical computation of classical and Non-classical solutions for a family of elliptic boundary value problems*, *Nonlinear Analysis T.M.A.* **48**, 567–605 (2002).
- [9] J. López-Gómez, *Dynamics of parabolic equations. From classical solutions to metasolutions*, *Differential Integral Equations* **16**, 813–828 (2003).
- [10] J. López-Gómez, *The boundary blow-up rate of large solutions*, *Journal of Differential Equations* **195**, 25–45 (2003).
- [11] J. López-Gómez, *Metasolutions: Malthus versus Verhulst in Population Dynamics. A dream of Volterra*, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations* (M. Chipot and P. Quittner eds.), Elsevier. In press.
- [12] J. López-Gómez, *Uniqueness of Large solutions for a class of radially symmetric elliptic equations*, *Spectral Theory and Nonlinear Analysis with Applications to Spatial Ecology* (S. Cano-Casanova, J. López-Gómez y C. Mora-Corral eds.), 75–110 (2005).

---

## Sesión 19: Gravitación y cosmología

Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)

Modera: Mario Zacarés

---

### Equilibrios relativos inestables y misiones de larga duración alrededor de satélites naturales

Martín Lara

*Real Observatorio de la Armada*  
11110 San Fernando, Cádiz

E-MAIL: [mlara@roa.es](mailto:mlara@roa.es)

COLABORADORES: Sebastián Ferrer (Universidad de Murcia)

Mediante técnicas numéricas y analíticas, se reduce y analiza un sistema Hamiltoniano que aproxima la dinámica alrededor de muchos de los satélites naturales del sistema solar. El sistema original, de tres grados de libertad, se promedia mediante dos transformaciones de Lie consecutivas, obteniendo un sistema de un grado de libertad dependiente de parámetros físicos y dinámicos. Para cada conjunto de valores de los parámetros, el flujo promediado se compone de equilibrios y curvas cerradas, y se puede representar mediante curvas de nivel del Hamiltoniano promediado. Los equilibrios estables del sistema reducido son candidatos ideales para situar una nave espacial. Sin embargo, las misiones científicas alrededor de satélites naturales requieren el uso de órbitas casi circulares y de inclinación alta, que resultan ser inestables debido a las perturbaciones planetarias. Para alargar la duración de la misión científica, se recurre a la Teoría de sistemas dinámicos. La duración de la misión se incrementa escogiendo la órbita inicial sobre la variedad estable de un equilibrio relativo inestable. La aplicación de las ecuaciones de transformación de uno a tres

grados de libertad, que el algoritmo de Lie-Deprit proporciona en forma explícita, proporciona condiciones iniciales de una órbita del problema original (sin promediar) que, en promedio, evoluciona casi exactamente sobre las variedades estable e inestable asociadas al equilibrio relativo.

## Bibliografía

- [1] A. Deprit, *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter*, *Celestial Mechanics*, **1** (1969) 12–30.
- [2] Paskowitz, M.E., and Scheeres, D.J., *Design of Science Orbits About Planetary Satellites: Application to Europa*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **29** (2006) 342–353.
- [3] Lara, M., San-Juan, J.F., and Ferrer, S., *Secular Motion around TriAxial, Synchronously Orbiting, Planetary Satellites: Application to Europa*, *Chaos*, **15** (2005) 1–13.

---

### Inestabilidad local y exponentes finitos de Lyapunov en hamiltonianos. Aplicación a potenciales galácticos

Juan C. Vallejo

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos.*

*Departamento de Física.*

*Escuela Superior de Ciencias Experimentales y Tecnología.*

*Universidad Rey Juan Carlos.*

*C/ Tulipán, s/n, 28933 Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [Juan.Carlos.Vallejo@esa.int](mailto:Juan.Carlos.Vallejo@esa.int)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/index.html>

COLABORADORES: M. A. F. Sanjuan (Universidad Rey Juan Carlos).

Las distribuciones de exponentes finitos de Lyapunov sirven para caracterizar los diversos estados dinámicos de un sistema [1]. Según se varia el tamaño del intervalo, esta caracterización es tanto a nivel local, proporcionando información sobre fenómenos tales como la variabilidad en la estabilidad dimensional, como a nivel global, proporcionando información sobre las posible caoticidad o regularidad de áreas del sistema. También mostramos la relación de estos resultados con la similitud entre las órbitas numéricas y reales (shadowing). Como modelo de aplicación, usaremos potenciales galácticos bi- y tri-dimensionales.

## Bibliografía

- [1] Juan C. Vallejo, Jacobo Aguirre, M. A. F. Sanjuan, *Characterization of the local Instability in the Henon-Heiles Hamiltonian*, *Physics Letters A* **311**, 26–38 (2003).

**Casimir effect: dynamical & cosmological**

Emilio Elizalde

*Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
ICE/CSIC and IEEC, Campus UAB, Facultat de Ciències  
08193 Bellaterra (Barcelona) Spain*

E-MAIL: [elizalde@ieec.uab.es](mailto:elizalde@ieec.uab.es)WWW: <http://www.ieec.fcr.es/english/recerca/ftc/eli/eli.htm>

COLABORADORES: Jaume Haro (UPC), Masato Minamitsuji (Kyoto University), Wade Naylor (Ritsumeikan University)

Moving mirrors modify in a very non-linear way the structure of the quantum vacuum, what manifests in the creation and annihilation of particles. Once the mirrors return to rest, a number of the produced particles may still remain which can be interpreted as radiated particles. This flux has been calculated in several situations by using different methods, as averaging over fast oscillations, by multiple scale analysis, with the rotating wave approximation, with numerical techniques, and others. Here we will address some severe problems associated with the physical description of the dynamical Casimir effect at all times. For simplicity, the case of a neutral scalar field in a cavity with partially transmitting mirrors (an essential proviso) is considered, but the method can be extended to fields of any kind and higher dimensions. The motional force calculated in our approach contains a reactive term —proportional to the mirrors' acceleration— which is fundamental in order to obtain (quasi)particles with a positive energy all the time during the movement of the mirrors —while always satisfying the energy conservation law. Comparisons with other approaches and an analysis of the interrelations among the different results previously obtained in the literature are carried out. This leads us to consider also, in some detail, the whole regularization process as a very nice example of non-linearity: the appropriate analytical continuation, first, with the avoidance of singularities, then the definition of the functional determinants, and also the derivative itself. We finish with the physical implications of the regularized quantum fluctuation (Casimir effect) contributions at a cosmological level, e.g., to the present acceleration of our universe.

**Bibliografía**

- [1] E. Elizalde, W. Naylor, M. Minamitsuji, *Casimir effect in rugby-ball type flux compactifications*, to appear.
- [2] J. Haro, E. Elizalde, *Hamiltonian approach to the dynamical Casimir effect*, Physical Review Letters **97**, 130401 (2006).
- [3] E. Elizalde, *El efecto Casimir*, Investigación y Ciencia, to appear.

**Sesión 20: Métodos numéricos iterativos**

Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)

Modera: Alfonso Bueno

**Dinámica en el estudio de la convergencia de una familia de procesos iterativos**

Natalia Romero Álvarez

*Departamento de Matemáticas y Computación  
Universidad de La Rioja  
C/ Luis de Ulloa s/n  
26004 - Logroño (La Rioja)*

E-MAIL: [natalia.romero@unirioja.es](mailto:natalia.romero@unirioja.es)

COLABORADORES: Miguel Ángel Hernández y Jose Antonio Ezquerro

El trabajo que presentamos se basa en la construcción geométrica de los procesos iterativos clásicos: método de Newton, con convergencia cuadrática, y los métodos de tercer orden: Chebyshev, Halley, super-Halley o Euler. De manera que, cuando estos métodos son aplicados a ciertas ecuaciones no lineales  $f(x) = 0$  observamos que tienen convergencia global y velocidad de convergencia infinita. En estos casos, el grado de convexidad logarítmico de la función derivada,  $L_{f'}(t) = f'(t)f'''(t)/f''(t)^2$ , cumple la propiedad de ser constante. Este hecho nos lleva a establecer un criterio de construcción de una familia multiparamétrica de procesos iterativos tipo Newton, con ordenes de convergencia altos, en la resolución numérica de ciertas ecuaciones no lineales. Además, esta familia engloba a todos los procesos iterativos clásicos citados. Así, construimos y analizamos la convergencia de esta nueva familia de procesos iterativos desde un punto de vista numérico y dinámico. Presentamos resultados de convergencia, siendo ésta global en los casos en los que el orden de convergencia es par. Además, mostramos graficamente en el plano complejo el comportamiento dinámico de alguno de los métodos contenidos en la familia y usamos estos dibujos para probar la convergencia general de la familia en el sentido propuesto por Smale.

**Iterative methods for eigenvectors**

Salvador Jiménez

*Depto. Matemática Aplicada a las TT.II,  
E.T.S.I. Telecomunicación,  
Universidad Politécnica de Madrid*

E-MAIL: [sjimenez@mat.upm.es](mailto:sjimenez@mat.upm.es)

COLABORADORES: Luis Vázquez (Universidad Complutense)

We present iterative methods to compute eigenvectors for a general, real, matrix. The first one is based on a dynamical system and converges linearly. As a second step, we present a new method with quadratic convergence.

## Sobre un método de tercer orden para sistemas de ecuaciones no lineales

Sonia Busquier

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
U.P. Cartagena  
Paseo Alfonso XIII, 52  
30203 Cartagena (Murcia)

E-MAIL: [sonia.busquier@upct.es](mailto:sonia.busquier@upct.es)

WWW: <http://www.demae.upct.es>

COLABORADORES: Sergio Amat (U.P. Cartagena), Concha Bermúdez (U.P. Cartagena), Fernando Manzano (U.P. Cartagena) y Sergio Plaza (U. de Santiago de Chile)

La resolución de ecuaciones no lineales ha preocupado a los científicos a lo largo de la Historia. Hoy en día, con los adelantos informáticos, estas ecuaciones son aproximadas de forma eficiente por medio de métodos iterativos. La idea es generar una sucesión de aproximaciones  $x_0, x_1, x_2, \dots$  que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada.

En general, un método iterativo  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  es de orden  $p$ -ésimo si la solución  $x^*$  de  $F(x) = 0$  satisface  $x^* = \Phi(x^*)$ ,  $\Phi'(x^*) = \dots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0$  y  $\Phi^{(p)}(x^*) \neq 0$ . Para este método, el error  $|x^* - x_{n+1}|$  es proporcional a  $|x^* - x_n|^p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n).$$

tiene convergencia cuadrática (orden dos) para raíces simples.

En este trabajo, presentamos una extensión a espacios de Banach de un método de tercer orden recientemente presentado en el caso escalar [2]. Se introducirán varios teoremas de convergencia, modificaciones que no necesitan el computo de derivadas y varios experimentos numéricos.

## Bibliografía

- [1] S. Amat, S. Busquier and J.M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*. J. Comput. Appl. Math. **157**, 197–205 (2003).
- [2] M.A. Noor *et al.*, *An iterative method with cubic convergence for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183**, 1249-1255 (2006).

## Relación entre topología de red y dinámica en redes inhibitorias de bursters

Borja Ibarz Gabardós

Grupo de Dinámica no Lineal y Teoría del Caos  
Universidad Rey Juan Carlos  
28933 Móstoles, Madrid

E-MAIL: [borja.ibarz@urjc.es](mailto:borja.ibarz@urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica>

COLABORADORES: José Manuel Casado (Universidad de Sevilla), Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos)

Algunos de los sistemas mejor estudiados y de mayor interés en neurociencia están formados por neuronas o células excitables que disparan en ráfagas (*bursters*). Entre ellas están las que forman los generadores centrales de patrones (*CPGs*), las neuronas reticulares del tálamo, las neuronas dopaminérgicas del mesencéfalo y las células  $\beta$  del páncreas. En muchos de estos sistemas las conexiones son mayoritariamente inhibitorias y determinan secuencias sincronizadas de disparos que controlan tareas rítmicas como la locomoción, la respiración o el ritmo cardiaco. Sin embargo, salvo en los casos más simples, la relación entre las características de las neuronas y la topología de la red, por un lado, y los patrones de actividad resultantes, por otro, no es obvia.

En el presente trabajo mostramos que, bajo ciertas condiciones, un análisis lineal de estabilidad [1] predice correctamente los ritmos generados por redes equilibradas de bursters inhibitorios a partir de la topología de la red. A diferencia de lo que sucede en redes excitatorias, donde el parámetro principal para determinar la sincronización de los ritmos es el número total de conexiones recibidas por cada neurona [2], en estas redes los patrones están en relación con las propiedades espectrales del grafo de conexiones. De aquí se desprenden algunas conclusiones interesantes, como la diferencia, en lo que respecta a la generación de patrones rítmicos, entre redes con conexiones recíprocas frente a redes asimétricas, o la selección de diferentes regímenes dinámicos en función de la intensidad de las sinapsis [3].

Emplearemos para ilustrar los resultados un modelo simple de neurona en tiempo discreto [4]:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= f(x_n^i, y_n^i), \\ y_{n+1}^i &= y_n^i - \mu \left( x_n^i - \sigma - \sum_j g_c^{ij} (x_n^j - \phi) H(x_n^j - \phi) \right). \end{aligned}$$

donde  $x^i$  representa el voltaje de membrana de la  $i$ -ésima neurona,  $y^i$  es una variable lenta ( $\mu \ll 1$ ) de recuperación, y los parámetros  $g_c^{ij}$  definen la topología de la red. La función  $f(x, y)$  y el parámetro  $\sigma$  se eligen para que las neuronas sean *bursters* intrínsecos, mientras que  $\phi$  es el umbral de interacción sináptica, y  $H(x)$  es la función escalón de Heaviside. El modelo captura la dinámica esencial del *burster* y facilita el análisis. Comprobaremos mediante simulaciones que los resultados son válidos en modelos de conductancia realistas.

## Bibliografía

- [1] L. M. Pecora y T. L. Carroll, *Master stability functions for synchronized coupled systems*, Physical Review Letters **80** (10), 2109–2112 (1998).

---

## Sesión 21: Dinámica y estructura de redes

Viernes 8 de Junio (11:30–12:30)

Modera: Mario Floria

---



- [2] I. V. Belykh, E. de Lange y M. Hasler, *Synchronization of bursting neurons: what matters in the network topology*, Physical Review Letters **94**, 188101 (2005).
- [3] B. Ibarz, J. M. Casado y M. A. F. Sanjuán, *Patterns in inhibitory networks of simple map neurons*, Physical Review E, *submitted* (2007).
- [4] N. F. Rulkov, *Regularization of synchronized chaotic bursts*, Physical Review Letters **86** (1), 183–186 (2001).

---

### Caracterización de la “robustez dinámica” en redes complejas

Juan Antonio Almendral Sánchez  
*Departamento de Física*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Calle Tulipán s/n*  
*28933 - Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [juan.almendral@urjc.es](mailto:juan.almendral@urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: Albert Díaz Guilera (Univ. Barcelona), Miguel Ángel Fernández Sanjuán (Univ. Rey Juan Carlos)

Los sistemas complejos están constituidos frecuentemente por muchos elementos interaccionando entre ellos. Para estudiar estos sistemas, un primer paso es obviar la naturaleza de los elementos para centrarse en las interacciones, que son descritas mediante una *red* o *grafo*. Desde este punto de vista, cada elemento es representado por un *nodo* o *vértice* y la interacción entre ellos por medio de un *enlace* o *arista*.

El estudio de las redes complejas ha despertado un gran interés entre los físicos en los últimos años. Estos estudios se han dirigido hacia diversos objetivos, entre los que caben destacar cuatro: describir la topología de las redes subyacentes en sistemas complejos reales, estudiar cómo aparecen y evolucionan estas redes, entender el comportamiento global de una red de sistemas dinámicos y el impacto de la topología en ese comportamiento global.

Esta contribución se ascribe al último objetivo. Consideramos diferentes tipos de redes, cuyos nodos son sistemas dinámicos y los enlaces acoplamientos, y analizamos cómo influye la topología en la aparición y persistencia de una dinámica global sincrónica.

En primer lugar probamos, numérica y analíticamente, que la sincronización del conjunto depende de la topología de la red a través del autovalor más pequeño (no nulo) de la correspondiente matriz Laplaciana. Posteriormente, caracterizamos cuantitativamente el efecto que tiene la eliminación progresiva de nodos en la sincronización del sistema. Esto nos permitirá medir la “robustez dinámica” de la red; esto es, la robustez de las propiedades dinámicas globales de la red a la eliminación de nodos. Este resultado puede ser usado para construir redes cuya funcionalidad sea tolerante a fallos.

---

### Hierarchical structures induce long range dynamical correlations in written texts

Enrique Alvarez-Lacalle  
*Departamento de Física Aplicada*  
*Universidad Politécnica de Catalunya*  
*08028 - Barcelona*

E-MAIL: [enrical@fa.upc.edu](mailto:enrical@fa.upc.edu)  
 WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa//eupb/NOLIN/>

COLABORADORES: B. Dorow (Institute for Natural Language Processing, Stuttgart, Germany), E. Moses (Weizmann Institute of Science, Israel) and J. P. Eckmann (Universite de Geneve, Switzerland)

Here I would like to present the ideas published last year on how to understand the process by which a text is understood and assimilated [1]. Thoughts and ideas are multi-dimensional and often concurrent, yet they can be expressed surprisingly well in a linear form by the translation into language. This dimensional reduction occurs naturally but requires memory, and implies the existence of correlations, *e.g.*, in written text. However, correlations in word appearance decay quickly, while previous observations of long ranged correlations using random walk approaches yield little insight on memory or on semantic context [2]. We therefore look at generalized combinations of words that a reader is exposed to within a “window of attention” spanning about a hundred words. We define a vector space of such word combinations, and analyze its structure by looking at words that co-occur within the window of attention. Singular value decomposition of the co-occurrence matrix identifies a basis whose vectors point at specific topics, or “concepts” that are relevant to the text. As the reader follows a text, the “vector of attention” traces out a trajectory in the “concept space”. We find that memory of the direction is retained over long times, forming power law correlations. The appearance of power laws hints at the existence of an underlying hierarchical network. Indeed, imposing a hierarchy similar to that defined by volumes, chapter, paragraphs etc., succeeds in creating correlations in a surrogate random text that are identical to those of the original text. We conclude that hierarchical structures in text serve to create long range correlations, and to utilize the reader’s memory in re-enacting some of the multi-dimensionality of the thoughts being expressed.

### Bibliografía

- [1] E. Alvarez-Lacalle, E. Moses, B. Dorow and J. P. Eckmann, *Hierarchical structures induce long range dynamic correlations in written texts*, Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS) **103**, 7956–7961(2006).
  - [2] C. K. Peng, S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, F. Sciortino, M. Simons and H. E. Stanley, Nature **356**, 168–170 (1992).
-

---

## Sesión 22: Sistemas forzados y resonancias

Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: José Luis Rodríguez Marrero

---

### Regiones de estabilidad en el Modelo del Microtrón

Oswaldo J. Larreal B.

*Departament de Matemàtica Aplicada I  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Diagonal 647, 08028 Barcelona, España*

E-MAIL: [oswaldo.larreal@upc.edu](mailto:oswaldo.larreal@upc.edu)

COLABORADORES: Tere M. Seara.

El microtrón es un acelerador de partículas cíclico de bajo consumo con el cual se obtienen altas energías (hasta algunas decenas de MeV en microtrones circulares y hasta un poco más de cien MeV en el microtrón racetrack). Las partículas son aceleradas por un campo eléctrico de alta frecuencia en una cavidad resonante o un acelerador lineal (linac), y son recirculadas por un campo magnético homogéneo, constante.

Las ecuaciones que modelan el cambio de fase y energía en el microtrón están dadas por la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x + C y & (1) \\ f_2(x, y) &= \Delta W_0 \cos(\phi_s + f_1(x, y)) + y - \Delta W & (2) \end{aligned}$$

donde  $C = \frac{2\pi\nu}{\Delta W}$ ,  $\Delta W = \Delta W_0 \cos(\phi_s)$  con  $\nu > 0$  y  $f_1$  es el cambio de fase y  $f_2$  es el cambio de energía. Este mapa presenta dos puntos fijos, para el caso en que  $-\arctan(\frac{2}{\pi\nu}) < \phi_s < 0$ , tenemos que el origen  $p_0$  es un punto fijo hiperbólico y  $p_1 = (-2\phi_s, 0)$  es elíptico. Un problema importante es escoger la llamada “región de estabilidad”, es decir, las condiciones iniciales  $p = (x_0, y_0)$  cuyas iteraciones  $f^n(p) = (f_1^n(p), f_2^n(p))$  no tiendan al infinito.

Para valores pequeños de la fase  $\phi_s$ , las simulaciones numéricas muestran que dicha región está delimitada por las variedades estables e inestables del punto crítico hiperbólico. Para poder hacer una aproximación a esta región hemos calculado el desarrollo en serie de potencias del parámetro  $\phi_s$  de las parametrizaciones de las variedades estable e inestable del origen y hemos encontrado además que tales parametrizaciones cumplen propiedades similares a las del Standard Map.

Estas propiedades indican que el desarrollo en serie de Taylor respecto del parámetro  $\phi_s$  de ambas variedades es el mismo y que, por tanto, el ángulo de intersección entre ambas curvas es menor que cualquier potencia de  $\phi_s$ . Una primera consecuencia de este estudio es que la zona de caos alrededor de dichas curvas tendrá un tamaño muy pequeño y que la zona de estabilidad se puede aproximar a todos los órdenes por las conexiones homoclínicas obtenidas formalmente.

---

## Rocking: Un nuevo tipo de forzamiento resonante de sistemas disipativos autooscilantes

Germán J. de Valcárcel

*Departament d'Òptica  
Universitat de València  
Dr. Moliner 50  
46100 - Burjassot*

E-MAIL: [german.valcarcel@uv.es](mailto:german.valcarcel@uv.es)

COLABORADORES: K. Staliunas (ICREA y Universitat Politècnica de Catalunya), M. Martínez-Quesada (Universitat de València), J. M. Buldú (Universidad Rey Juan Carlos), A. Esteban (Institut de Ciències Fotòniques), V. B. Taranenko (National Academy of Sciences of the Ukraine), E. Roldán (Universitat de València), y J. García-Ojalvo (Universitat Politècnica de Catalunya)

Recientemente se ha descrito un nuevo tipo de forzamiento resonante de sistemas disipativos autooscilantes denominado “rocking” [1], cuya frecuencia,  $\omega_R$ , se encuentra alrededor de la natural del sistema,  $\omega_0$  (se trata por tanto de una resonancia 1 : 1) y cuya amplitud,  $A$ , se encuentra modulada en el tiempo, teniendo valor medio nulo. Un ejemplo paradigmático es el forzamiento biperiódico  $A \cos \omega_R t$ , con  $A = F \cos \omega t$ . El efecto principal del rocking es producir un bloqueo de la frecuencia de las oscilaciones a  $\omega_R$  y un bloqueo biestable de la fase de las oscilaciones. En este sentido, el rocking es una alternativa al clásico forzamiento paramétrico a frecuencia doble de la natural (resonancia 2 : 1). Además, el bloqueo de fases es responsable de la formación de patrones espaciales en el caso de sistemas extensos. La predicción, basada en un modelo de Ginzburg-Landau complejo forzado [1], ha sido verificada analítica, numérica y experimentalmente en diferentes sistemas: osciladores fotorrefractivos [2], láseres [3, 4], circuitos electrónicos [5] y reactores químicos [6]. Asimismo, se ha comprobado la eficiencia del método en el caso de variaciones estocásticas de la amplitud de modulación,  $A$ : bloqueo biestable de fases inducido por ruido [7]. En la presentación se dará cuenta de estos resultados.

## Bibliografía

- [1] G. J. de Valcárcel, K. Staliunas, *Excitation of phase patterns and spatial solitons via two-frequency forcing of a 1:1 resonance*, Physical Review E **67**, 026604 (2003).
  - [2] A. Esteban-Martín et al., *Bistable phase locking of a nonlinear optical cavity via rocking: Transmuting vortices into phase patterns*, Physical Review Letters **97**, 093903 (2006).
  - [3] K. Staliunas et al., *Bistable phase locking in rocked lasers*, Optics Communications **268**, 160–168 (2006).
  - [4] M. Martínez-Quesada, G. J. de Valcárcel, *Phase cavity-solitons in rocked lasers*, en redacción.
  - [5] J. M. Buldú, et al. *Bistable phase control via rocking in a nonlinear electronic oscillator*, Chaos (en prensa).
  - [6] G. J. de Valcárcel, *1:1 resonant phase patterns in a reaction-diffusion system via rocking*, en redacción.
  - [7] G. J. de Valcárcel et al., *Noise induced bistable phase locking*, en redacción.
-

**Resonancias en columna de agua oscilante: un estudio asintótico, numérico y experimental**

Arturo Olvera

IIMAS

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria

México, D.F. 04510

México

E-MAIL: aoc@mym.iimas.unam.mx

WWW: <http://mym.iimas.unam.mx>

COLABORADORES: Francisco González

Una columna de agua es excitada en forma periódica por medio de un pistón que varía la presión en la cámara de compresión. La excitación periódica de la columna produce un fenómeno multiresonante debido a la interacción no lineal de los términos de disipación y de compresión adiabática. En este trabajo presentamos un modelo que representa la dinámica de la columna y lo estudiamos de forma asintótica para obtener las amplitudes de oscilación en función de la magnitud de la excitación. Los resultados se confrontan con el estudio numérico. También presentamos el montaje experimental para comprobar los resultados asintóticos y numéricos.

- (H1)  $(f_{.,i}(x), x)_{\mathbb{R}^m} \geq \alpha |x|_{\mathbb{R}^m}^2 - c_{0i}$ ,  $c_0 \in l^1$ ,  $\alpha > 0$ .
- (H2)  $|f_{.,i}(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq C(|x|_{\mathbb{R}^m})|x|_{\mathbb{R}^m} + c_{2,i}$ , con  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $c_2 \in l^2$  y  $C(\cdot)$  es una función continua y creciente.
- (H3)  $a = (a_{k,l})$  es una matriz con parte simétrica semidefinida positiva, esto es,  $\exists \beta \geq 0 : \frac{1}{2}(a + a^*) \geq \beta I_m$ . Esta discretización proviene del problema

$$u_t = a\Delta u - f(x, u), x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0 \in \left[ L^2(\mathbb{R}^N) \right]^d, \tag{3}$$

que ha sido estudiado en [1]. Una de las muchas aplicaciones en las cuales puede ser utilizado este modelo son las ecuaciones de Fitz–Hugh–Nagumo, este sistema es bastante conocido y modeliza la transmisión de las señales nerviosas a través de los axones.

El principal resultado que hemos obtenido en este trabajo es la existencia de un atractor global compacto para el sistema infinito-dimensional. Comparando este trabajo con resultados anteriores, nuestras condiciones no nos permiten garantizar la existencia única de solución, por este motivo definimos un semiflujo multivaluado en lugar de un semigrupo de operadores y utilizamos la teoría apropiada. Finalmente, también demostramos la semicontinuidad superior del atractor con respecto a los atractores obtenidos mediante la aproximación finito-dimensional del sistema.

---

**Sesión 23: Existencia de soluciones**

Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Francisco Balibrea

---

**Atractores para sistemas de infinitas ecuaciones diferenciales**

Francisco Morillas

Universidad Politécnica de Valencia

Dpto. de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente

Camino de Vera, s/n

46022 - Valencia, España

E-MAIL: [framoju@doctor.upv.es](mailto:framoju@doctor.upv.es)

COLABORADORES: J. Valero (Universidad Miguel Hernández)

Un gran número de procesos que proceden de la Física, Química, Biología, Economía y otras ciencias pueden ser descritos por ecuaciones de reacción-difusión. En este trabajo estudiamos el comportamiento asintótico de un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas de realizar la discretización de una ecuación del tipo mencionado en un dominio no acotado. Este sistema viene motivado por la necesidad de resolución numérica de físicos e ingenieros. En particular, el sistema discretizado que estudiamos tiene la forma

$$\begin{cases} \frac{du_{j,i}}{dt} = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^m a_{jk} (u_{k,i-1} - 2u_{k,i} + u_{k,i+1}) - f_{j,i}(u_{.,i}) \\ u_{j,i}(0) = (u_0)_{j,i} \end{cases} \tag{1}$$

con  $u_0 \in l_m^2$ , donde se asumen las siguientes hipótesis:

---

**Bibliografía**

- [1] F. Morillas, J. Valero, *Attractors for reaction-diffusion equations in  $\mathbb{R}^N$  with continuous nonlinearity*, *Asymptotic Anal.*, **44** (2005) 111-130.

---

**Atractores para ecuaciones diferenciales paramétricas con retardo sin unicidad y semicontinuidad superior**

Pedro Marín-Rubio

Dpto. Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

Universidad de Sevilla

Apdo. Correos 1160,

41080 Sevilla

E-MAIL: [pmr@us.es](mailto:pmr@us.es)

WWW: <http://www.personal.us.es/pmr>

En este trabajo se prueba la existencia de atractor global  $\mathbb{A}^{(\lambda)}$  bajo hipótesis mínimas para un tipo general de ecuaciones diferenciales con retardos dependientes de parámetros, planteadas en (potencialmente) distintos espacios de fases, y en principio sin unicidad de solución:

$$x'(t) = F_0(x(t)) + F_1(x(t - \rho(\lambda))) + \int_{-\tau(\lambda)}^0 b(s, x(t+s)) ds.$$

Seguidamente, establecemos un resultado de semicontinuidad superior en este marco multi-valuado de dichos atractores respecto del parámetro  $\lambda$ . También se analizan condiciones equivalentes para su continuidad bajo hipótesis adicionales.

## Inestabilidades y colapso en mezclas de bosones y fermiones

Vladyslav Prytula

Departamento de Matemáticas  
e Instituto de Matemática Aplicada  
a la Ciencia y la Ingeniería  
Universidad de Castilla-La Mancha  
E. T. S. Ingenieros Industriales,  
Avda. Camilo José Cela, 3  
13071 Ciudad Real

E-MAIL: vladyslav.prytula@uclm.es

WWW: <http://matematicas.uclm.es/nlwaves>

COLABORADORES: Vladimir Konotop (Universidad de Lisboa), Vadym Vekslerchik (Universidad de Castilla-La Mancha), Víctor M. Pérez-García (Universidad de Castilla-La Mancha).

En el estudio de mezclas de bosones y fermiones ultrafíos han aparecido recientemente las ecuaciones [1, 2]

$$\begin{cases} i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m_b}\Delta\psi + V_b(r)\psi + g_{bb}|\psi|^2\psi + g_{bf}\rho\psi \\ \rho_{1tt} = \text{div} \left[ \rho_0 \text{grad} \left( \frac{(6\pi^2)^{2/3}\hbar^2}{3m_f^2\rho_0^{1/3}}\rho_1 + \frac{g_{bf}}{m_f}|\psi|^2 \right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\psi(t, x)$  es una función de onda que describe a los bosones y  $\rho(t, x)$  tiene que ver con las perturbaciones de la densidad de fermiones,  $\rho_0(x)$  es una función del punto conocida y  $m_f, m_b, \hbar$  son las masas de los fermiones, bosones y la constante de Planck. Los coeficientes  $g_{bb}, g_{bf}$  miden respectivamente las interacciones entre bosones y entre bosones y fermiones respectivamente y son responsables de la no linealidad y del acoplo entre las dos ecuaciones respectivamente. Este modelo consta de una ecuación de Schrödinger no lineal acoplada con una ecuación de ondas inhomogénea y tiene relevancia en el campo, muy activo, de la física de sistemas cuánticos degenerados.

El modelo dado por las ecuaciones (1), tiene similitudes con las denominadas ecuaciones de Zakharov [3], que aparecen también en física de plasmas y otros problemas relacionados con la diferencia de dependencias espaciales que aparecen en la función positiva  $\rho_0(x)$ .

En esta comunicación se estudian formalmente las ecuaciones y se establecen condiciones de existencia global de soluciones usando los métodos desarrollados en [4, 5], así como las implicaciones físicas que tiene el fenómeno de colapso sobre las mezclas ultrafíos de bosones y fermiones.

## Bibliografía

- [1] T. Tsurumi and M. Wadati, *Dynamics of magnetically trapped boson-fermion mixtures*, J. Phys. Soc. Jap. **69**, 97 (2000).
- [2] Yu. V. Bludov, V. V. Konotop, *Matter waves of Bose-Fermi mixtures in one-dimensional optical lattices*, Phys. Rev. A **74**, 043620 (2006).
- [3] V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972).
- [4] S. H. Schochet, M. I. Weinstein, *The Nonlinear Schrödinger limit of the Zakharoc Equations governing Langmuir Turbulence*, Commun. Math. Phys. **106**, 569 (1986).

- [5] C. Sulem, P.L. Sulem, *Regularity properties for the equations of Langmuir turbulence*, C. R. Acad. Sci. Paris A **289**, 173-175 (1979).

---

## Sesión 24: Geociencias

Viernes 8 de Junio (12:45–13:45)

Moderador: Javier Gómez Jiménez

---

### Espectros de energía de los breathers en la transformación reconstructiva de la mica muscovita

Juan F. R. Archilla

Grupo de Física No Lineal

Universidad de Sevilla

ETSI Informática. Avda Reina Mercedes s/n  
41003-Sevilla, España

E-MAIL: [archilla@us.es](mailto:archilla@us.es)

WWW: <http://www.grupo.us.es/gfnl/archilla>

COLABORADORES: J. Cuevas, J. M. Trillo, M. D. Alba

Las transformaciones reconstructivas de algunos silicatos laminares como la mica muscovita tienen lugar a temperaturas mucho menores que las esperadas. Una posible explicación es la existencia de breathers en el plano de iones de potasio [1]. El análisis numérico de un modelo muestra la aparición de breathers de diferentes energías y rangos de existencia cuyo espectro coincide aproximadamente con la teoría estadística de los mismos [2].

## Bibliografía

- [1] J. F. R. Archilla, J. Cuevas, M. D. Alba, N. Naranjo and J. M. Trillo *Discrete breathers for understanding reconstructive mineral processes at low temperatures*, J. Phys. Chem. B **110**, 24112–24120 (2006).
- [2] F. Piazza, S. Lepri and R. Livi *Cooling nonlinear lattices toward energy localization*, Chaos **13**, 637–645 (2003).

---

### Morfología y dinámica de formas amorfas y cristalinas de hielo

Bruno Escribano Salazar

Laboratorio de Estudios Cristalográficos (CSIC)

Edificio Instituto López-Neyra

Av. del Conocimiento s/n

Parque Tecnológico de Ciencias de la Salud

18100 - Armilla, Granada

E-MAIL: [bruno@lec.csic.es](mailto:bruno@lec.csic.es)

COLABORADORES: Julyan H. E. Cartwright (CSIC), C. Ignacio Sainz Diaz (CSIC)

Presentamos los resultados de experimentos en los que se crecieron in-situ láminas delgadas de hielo amorfo y

crystalino a temperatura de 5–200 K en microscopio crioeSEM. Estas son las condiciones en que se forma la mayoría del hielo presente en el universo: hielo cometario e interestelar, y por lo tanto es de gran interés entender la dinámica de su formación y su morfología.

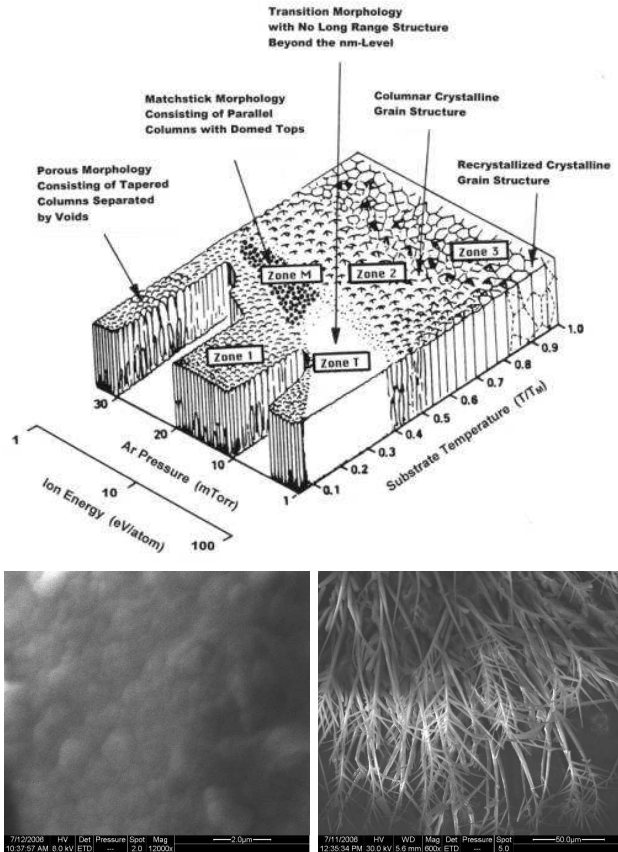


Fig 1: (a) El modelo de zonas de estructuras. (b) Morfología zona 1 (coliflor). (c) Hielo cristalino en forma palmítica.

En estos experimentos podemos apreciar que algunas de las morfologías resultantes son semejantes a las encontradas en materiales cerámicos y en semiconductores, y siguen el modelo de zonas de estructuras (SZM), según el cual la morfología superficial de películas delgadas estará definida por las condiciones de presión y temperatura en el momento de la deposición [1]. Aplicamos la dinámica no lineal para explicar por qué experimentos de deposición de películas delgadas dan resultados semejantes tanto en materiales cerámicos y semiconductores como en materiales presentes en polvo interestelar.

## Bibliografía

[1] A. Lakhtakia, R. Messier, *Sculptured Thin Films: Nanoengineered Morphology and Optics*, SPIE Press (2005).

## Calibración de la entropía de Shannon para evaluar la heterogeneidad de distribuciones masa-tamaño

José-Manuel Rey  
 Departamento de Análisis Económico  
 Universidad Complutense  
 Campus de Somosaguas  
 28224 - Madrid.

E-MAIL: j-man@ccee.ucm.es  
 WWW: <http://www.etsia.upm.es/gruposinv/pedofract/grupo.htm>

COLABORADORES: Miguel Ángel Martín (Universidad Politécnica de Madrid)

La entropía de Shannon  $H$  tiene sólida reputación en ciencias como indicador de la uniformidad o heterogeneidad de una distribución, por ejemplo, en ecología como índice de biodiversidad [1], o en economía como medida de desigualdad en la distribución de la renta [2]. Sin embargo, es común que las distribuciones de interés estén definidas sobre un rango de tamaños clasificados mediante una partición muy asimétrica, lo que implica que  $H$  produce una medida distorsionada. La entropía equilibrada ( $BE$ ), propuesta por Martín y Rey, permite solventar ese problema conservando las buenas propiedades de  $H$ . En esta comunicación se presenta el índice  $BE$  [3], se muestran sus propiedades como medida de heterogeneidad en general y su buen desempeño en Ciencias de la Tierra como parámetro textural de suelos [4] y su interpretación original como dimensión fractal subyacente [5].

## Bibliografía

[1] R. MacArthur, *Fluctuations of animal populations and measure of community stability*, Ecology **36**, 533–536 (1955).  
 [2] H. Theil, *Economics and Information Theory*, Amsterdam, North-Holland (1967).  
 [3] M.A. Martín, J.-M. Rey., F.J. Taguas, *An entropy-based heterogeneity index for mass-size distributions in Earth Science*, Ecological Modelling **182**, 221–228 (2005).  
 [4] J.-M. Rey, E. Montero, M.A. Martín, *Interscale behavior of balanced entropy for soil texture*, Geoderma **134**, 415–427 (2006).  
 [5] M.A. Martín, J.-M. Rey., F.J. Taguas, *An entropy-based parameterization of soil texture via fractal modeling of particle-size distribution*, Proc. Royal Soc. London Ser. A **457**, 937–948 (2001).

## Sesión 25: Caos y control

Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)

Moderador: Luis Martínez Salamero

## Huellas de los movimientos homo y heteroclínicos en la mecánica cuántica

Florentino Borondo

*Departamento de Química, C-IX  
Universidad Autónoma de Madrid  
CANTOBLANCO-28049 Madrid*

E-MAIL: f.borondo@uam.es

COLABORADORES: R. M. Benito (Universidad Politécnica de Madrid), E. Vergini (Universidad Politécnica de Madrid), D. A. Wisniacki (Universidad de Buenos Aires)

Los trabajos pioneros de Poincaré a principios del siglo XX pusieron de manifiesto la posibilidad de existencia de movimientos caóticos en sistemas dinámicos Hamiltonianos, y sobre todo mostraron que la (aparente) complejidad subyacente podía entenderse de forma adecuada considerando solamente las órbitas periódicas inestables y sus variedades asociadas, que se cruzan infinitas veces formando la llamada “*maraña*” *homoclinica*. Estos resultados demostraron bien a las claras que las órbitas homoclinicas y heteroclinicas asociadas a una periódica organizan la complejidad inherente al caos clásico.

Posteriormente, tuvo lugar el desarrollo de la mecánica cuántica. En las fases iniciales, que a veces se conoce como “*mecánica cuántica antigua*”, se mantuvo una cierta conexión con los argumentos clásicos, poniendo de manifiesto los trabajos de Einstein, Ehrenfest y Bohr la importancia de la cuantización de la acción [1]. Esta conexión desapareció en las formulaciones cuánticas estándar que finalmente se impusieron, y hubo que esperar a la década del los años 1970’s en la que Gutzwiller desarrolló una teoría semiclásica capaz de cuantizar sistemas con comportamiento caótico [2]. Lo curioso es que esta teoría se basaba únicamente en las órbitas periódicas y sus propiedades individuales para llevar a cabo tal cuantización.

Más tarde, Heller puso de manifiesto el fenómeno llamado de cicatrices (“*scars*” en inglés) mediante el cual algunos autoestados de este tipo de sistemas presentan acumulaciones de probabilidad mucho mayor de los esperables a lo largo de estas trayectorias clásicas, cuando se cumple la correspondiente condición de cuantización [3]. Aparte de su interés teórico, se han descrito en la bibliografía numerosas aplicaciones prácticas, especialmente en nanotecnología, de este fenómeno [4].

Recientemente nosotros hemos publicado una serie de artículos [5] en los que se demuestra que las órbitas homoclinicas y heteroclinicas también tienen una expresión clara en la mecánica cuántica de los sistemas caóticos, habiendo encontrado también expresiones analíticas para las correspondientes condiciones de cuantización. Estos resultados cierran el círculo de conexión entre los trabajos de Poincaré y su relación con la mecánica cuántica.

## Bibliografía

- [1] A. D. Stone, Phys. Today, August 2005, p. 37.
- [2] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [3] E. J. Heller, Phys. Rev Lett. **53**, 1515 (1984); E. J. Heller, *Chaos and Quantum Physics*, M. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin eds. (Elsevier, Amsterdam, 1991).

- [4] P. B. Wilkinson et al., Nature (London) **380**, 608 (1996); J. U. Nöckel y A. D. Stone, Nature (London) **385**, 45 (1997); C. Gmachl et al., Science **280**, 1556 (1998).
- [5] D. W. Wisniacki, E. Vergini, R. M. Benito and F. Borondo, Phys. Rev. E **70**, 35202(R) (2004); Phys. Rev. Lett. **94**, 54101 (2005); Phys. Rev. Lett. **97**, 94101 (2006); A. A. Zembekov, R. M. Benito y F. Borondo, Phys. Rev. Lett. (en prensa).

---

## Chaotic pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit

Manuel Iñarrea

*Área de Física Aplicada  
Universidad de La Rioja  
26006 - Logroño, La Rioja*

E-MAIL: manuel.inarrea@unirioja.es

COLABORADORES: José Pablo Salas (Universidad de La Rioja), Ana Isabel Pascual (Universidad de La Rioja) y Víctor Lanchares (Universidad de La Rioja)

We study the pitch attitude dynamics of an asymmetric magnetic spacecraft in a polar almost circular orbit under the influence of a gravity gradient torque. The spacecraft is perturbed by the small eccentricity of the elliptic orbit and by a small magnetic torque generated by the interaction between the Earth’s magnetic field and the magnetic moment of the spacecraft [1, 2]. The magnetic field of the Earth is modeled as a dipole aligned with the Earth’s rotation axis.

Under both perturbations, we show that the pitch motion exhibits heteroclinic chaotic behavior by means of the Melnikov method [3]. This technique gives us an analytical criterion for heteroclinic chaos in terms of the system parameters. Numerical methods [4] applied to simulations of the pitch motion also confirm the chaotic character of the spacecraft attitude dynamics.

Finally, a feedback method for controlling chaos [5] is applied to the governing equations of the spacecraft pitch motion in order to remove the chaotic character of initially irregular attitude motions and transform them into periodic ones.

## Bibliografía

- [1] P.C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley & Sons, New York (1986).
  - [2] M.J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press, New York (1997).
  - [3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York (1983).
  - [4] R.H. Enns and G.C. McGuire, *Nonlinear Physics with Mathematics for Scientists and Engineers*. Birkhäuser, Boston (2001).
  - [5] K. Pyragas, *Control of Chaos via extended delay feedback*, Physics Letters A **206**, 323–330 (1995).
-

## Control por la fase de sistemas dinámicos

Samuel Zambrano

*Departamento de Física, Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid.*

E-MAIL: [samuel.zambrano@urjc.es](mailto:samuel.zambrano@urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: I. Leyva, I. P. Mariño, J. Seoane y M. A. F. Sanjuán (URJC), E. Allaria, F. T. Arecchi, S. Brugioni, R. Meucci y F. Salvadori (CNR-Istituto Nazionale di Ottica Applicata, Firenze, Italia)

Paralelamente al desarrollo de la Dinámica No Lineal, el estudio de métodos que permitan controlar sistemas dinámicos no lineales ha experimentado un auge importante durante los últimos años. Así pues, existe una amplia literatura en la que se detallan métodos que permiten controlar el caos [1] y otros fenómenos dinámicos no lineales paradigmáticos, tales como la intermitencia [2] o los transitorios caóticos [3].

En este trabajo se muestra que el método de control por la fase es capaz de controlar varios fenómenos dinámicos complejos distintos. Este método se aplica típicamente a sistemas dinámicos con forzamiento periódico. Consiste en aplicar una pequeña perturbación periódica al sistema y modificar la diferencia de fase existente entre ésta y el forzamiento principal. Se observa que el valor de la fase juega un papel clave en la dinámica del sistema, permitiendo modificar de un modo drástico su estado final. Utilizando este método, se puede suprimir el comportamiento caótico en ciertos osciladores [4], y también se puede controlar el fenómeno de la intermitencia asociado a las crisis interiores en sistemas tan dispares como la aplicación logística y un láser de CO<sub>2</sub> [5]. En osciladores con escapes y transitorios caóticos, como el de Helmholtz, este método también se ha mostrado capaz de prolongar la vida media de los transitorios caóticos. La sencillez de su implementación experimental, así como su capacidad para controlar fenómenos dinámicos muy distintos, hacen que esta técnica sea una de las más prometedoras en el campo del control de los sistemas dinámicos.

## Bibliografía

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke. *Controlling Chaos*, Physical Review Letters **64**, 1196–1199 (1990).
- [2] R. Meucci, E. Allaria, F. Salvadori and F. T. Arecchi. *Attractor Selection in Chaotic Dynamics*, Physical Review Letters **95**, 180141 (2005).
- [3] J. Aguirre, F. d’Ovidio and M. A. F. Sanjuán. *Controlling chaotic transients: Yorke’s game of survival*, Physical Review E **69**, 041910 (2004).
- [4] S. Zambrano, S. Brugioni, E. Allaria, I. Leyva, R. Meucci, Miguel A. F. Sanjuán, and F. T. Arecchi. *Numerical and Experimental Exploration of Phase Control of Chaos*, Chaos **16**, 013111 (2006).
- [5] S. Zambrano, I. P. Mariño, F. Salvadori, R. Meucci, Miguel A. F. Sanjuán, and F.T. Arecchi. *Phase control of intermittency in dynamical systems*, Physical Review E **74**, 016202, (2006).

## Sesión 26: Solitones espaciales iii

Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)

Moderada: Vadym Vekslerschik

### Solitones de cavidad en láseres bidireccionales

Eugenio Roldán

*Departament d’Òptica  
Universitat de València  
Dr. Moliner 50  
46100 - Burjassot, Spain*

E-MAIL: [eugenio.roldan@uv.es](mailto:eugenio.roldan@uv.es)

WWW: <http://nlp.webs.upv.es/>

COLABORADORES: I. Pérez-Arjona and V.J. Sánchez-Morcillo (Universitat Politècnica de València)

El láser bidireccional ha sido muy estudiado desde el punto de vista de la dinámica no lineal temporal HZ pero no, hasta donde sabemos, como sistema formador de estructuras disipativas. Hemos comenzado este estudio motivados por la posibilidad de que este láser exhiba solitones de cavidad de forma espontánea. En principio los láseres bidireccionales pueden emitir en continuo sólo de forma unidireccional, (la solución continua bidireccional es siempre inestable). Sin embargo, en láseres con gran apertura la situación es diferente porque en diferentes regiones del plano transversal pueden existir soluciones monomodo diferentes unidas por frentes, siempre que estos sean estables. Esto es lo que de hecho ocurre y pueden formarse solitones de cavidad si las pérdidas para ambos campos difieren un poco (del orden del 2

## Bibliografía

- [1] H. Zeghlache, P. Mandel, N. B. Abraham, L. M. Hoffer, G. L. Lippi, and T. Mello, Phys. Rev. A **376**, 470 (1988).

### Quantum Entangled Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates on Optical Lattices

Lincoln D. Carr

*Department of Physics  
Colorado School of Mines  
Golden, Colorado 80401, U.S.A.*

E-MAIL: [lcarr@mines.edu](mailto:lcarr@mines.edu)

WWW: <http://www.mines.edu/~lcarr>

COLABORADORES: Ryan V. Mishmash

The mean-field wave function of weakly interacting Bose-Einstein condensates is known to obey the Gross-Pitaevskii equation, i.e., the nonlinear Schrödinger equation. Instead of focusing exclusively on the the mean-field dynamics, as has already been studied in depth [1, 2], we employ a fully quantum approach by treating the condensate atom by atom in a one-dimensional optical lattice. Specifically, we study the time evolution of discrete dark *quantum* solitons in a repulsive condensate.

With a Hilbert space composed of Fock (number) states on the lattice, we employ a single band Bose-Hubbard model to simulate the dynamics of the condensate using multiple numerical methods. These include “exact” numerical solutions via computational linear algebra and a recently invented approximation scheme which takes the entanglement as a cut-off parameter; the latter is known as the Time Evolving Block Decimation algorithm [3, 4]. As an initial condition, we take a quantum many-body state that is completely factorized with respect to lattice sites, i.e., a Gutzwiller ansatz. On-site, we construct truncated coherent states and build direct quantum analogs to the dark soliton solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equation. We show that purely quantum mechanical effects such as quantum entanglement play a key role in the soliton dynamics. Thus the mean-field picture is insufficient to describe dark solitons arising in a Bose-Einstein condensate trapped in a one dimensional lattice.

This material is based upon work supported by the National Science Foundation under Grant PHY-0547845.

## Bibliografía

- [1] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [2] P. G. Kevrekidis, K. O. Rasmussen, and A. R. Bishop, *The discrete nonlinear Schrödinger equation: A survey of recent results*, J. Mod. Phys. B, **15**, 2833 (2001).
- [3] G. Vidal, *Efficient Classical Simulation of Slightly Entangled Quantum Computation*, Phys. Rev. Lett., **91**, 147902 (2003).
- [4] G. Vidal, *Efficient Simulation of One-Dimensional Quantum Many-Body Systems*, Phys. Rev. Lett., **93**, 040502 (2004).

---

### Subdiffractive solitons in Kerr-nonlinear photonic crystals, and spatio-temporally modulated BECs

Kestutis Staliunas  
ICREA, Polytechnic University of Catalonia, Terrassa, Barcelona

E-MAIL: [kestutis.staliunas@icrea.es](mailto:kestutis.staliunas@icrea.es)

COLABORADORES: German Valcarcel (University of Valencia, Valencia), and Ramon Herrero (Polytechnic University of Catalonia, Barcelona)

We investigate the systems described by spatio-temporally modulated Nonlinear Schrödinger Equation. This physically corresponds to Kerr-nonlinear photonic crystals, and spatio-temporally modulated BECs. We show, that the resulting diffraction of waves in non-diffractive regimes is governed by a second order diffraction (second power of Laplace operators), resulting in a subdiffractive (weakly diffractive) dynamics. In the presence of Kerr nonlinearity, the governing (amplitude) equation becomes the modified nonlinear Schrödinger equation, where the Laplace operator is substituted

by its second power. We show that this modified nonlinear Schrödinger equation shows stable localized (soliton-like) solutions in case of 1 and 2 spatial dimensions.

---

## Sesión 27: Sincronización en sistemas complejos

Viernes 8 de Junio (16:45–17:45)

Moderadora: Irene Sendiña Nadal

---

### Synchronizability determined by coupling strengths and topology on Complex Networks

Yamir Moreno  
Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos (BIFI), Universidad de Zaragoza, Zaragoza 50009, Spain

E-MAIL: [yamir@unizar.es](mailto:yamir@unizar.es)

WWW: <http://complex.unizar.es/~yamir>

COLABORADORES: Jesús Gómez-Gardeñes, Alex Arenas

We investigate in depth the synchronization of coupled oscillators on top of complex networks with different degrees of heterogeneity within the context of the Kuramoto model. In a previous paper [Phys. Rev. Lett. 98, 034101 (2007)], we unveiled how for fixed coupling strengths local patterns of synchronization emerge differently in homogeneous and heterogeneous complex networks. In this talk, we provide more evidence on this phenomenon extending the previous work to networks that interpolate between homogeneous and heterogeneous topologies. We also present new details on the path towards synchronization for the evolution of clustering in the synchronized patterns. Finally, we investigate the synchronization of networks with modular structure and conclude that, in these cases, local synchronization is first attained at the most internal level of organization of modules, progressively evolving to the outer levels as the coupling constant is increased. The present work introduces new parameters that are proved to be useful for the characterization of synchronization phenomena in complex networks.

---

### Sincronización de redes complejas por enlaces repulsivos dispersos

Inmaculada Leyva Callejas  
Departamento de Física  
Universidad Rey Juan Carlos  
Móstoles, Madrid

E-MAIL: [inmaculada.leyva@urjc.es](mailto:inmaculada.leyva@urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: I. Sendiña-Nadal, J. A. Almendral, M. A. F. Sanjuán

En los últimos años se han ensayado diferentes estrategias para mejorar la sincronización en redes complejas, como enlaces ponderados, distintos tipos de estructura, la



influencia del grado, etc [1]. Sin embargo, se ha prestado poca atención a una de las estrategias usadas por la naturaleza para mejorar la transmisión de información por una red: combinar las propiedades de distintos tipos de enlaces, como sucede en la coexistencia de enlaces excitatorios e inhibitorios en el cerebro.

En este trabajo [2], mostramos cómo la sincronización de una red compleja tipo small-world, con enlaces mayoritariamente atractivos, se ve potenciada por la presencia de una muy pequeña proporción de enlaces repulsivos. Comprobamos la generalidad del resultado utilizando distintos tipos de unidades dinámicas: neuronas tipo Hodgking-Huxley y una red de spines. Finalmente, por medio de un análisis puramente topológico, relacionamos el comportamiento dinámico observado con las propiedades estructurales de la red.

## Bibliografía

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**, 175–308 (2006).
- [2] I. Leyva, I. Sendiña-Nadal, J. A. Almendral, M. A. F. Sanjuán, *Sparse repulsive couplings enhances synchronization in complex networks*, Phys. Rev. E **74**, 056112 (2006).

---

### Using Lyapunov Exponents to detect Synchronized States

Jean Bragard  
*Departamento de Física y Matemática Aplicada*  
*Universidad Navarra*  
*31080 - Pamplona, Navarra*

E-MAIL: [jbragard@unav.es](mailto:jbragard@unav.es)  
 WWW: <http://www.unav.es>

COLABORADORES:

We have studied how the Lyapunov spectrum is varied while coupling identical chaotic systems. In particular, we have tested our predictions with the Roessler, Lorenz, chaotic prey-predator (with four trophic levels) and also a chaotic neuronal dynamical system. For each of the above mentioned dynamical systems, we have coupled two identical copies of the dynamical systems and calculated numerically how the Lyapunov spectrum evolves when varying both the coupling strength and the asymmetry in the coupling (see reference PRL91,4103,(2003)). Strikingly, one sees the appearance of islands of synchronization much below the threshold of complete synchronization which is also given. These islands are characteristic of any of the dynamical systems that we have dealt with. To conclude, some conjecture on how to exploit these islands of synchronization is given.

---



---

## Sesión 28: Estructura de redes

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

Moderador: Yamir Moreno

---

### Resultados analíticos sobre las propiedades de los grafos de Albert-Barabási utilizando la teoría del campo medio

Benito Hernández-Bermejo  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*C/Tulipán S/N*  
*28933 - Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [benito.hernandez@urjc.es](mailto:benito.hernandez@urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~matemati/benito/benito.html>

COLABORADORES: Jorge Marco-Blanco, Miguel Romance

El modelo de Albert-Barabási para crecimiento de grafos es de gran importancia fundamental y aplicada debido a que es capaz de generar redes con una distribución de grados del tipo *scale-free*, propiedad presente en multitud de redes reales humanas y naturales. Para investigar este tipo de redes se utiliza la teoría del campo medio, en la que se considera que el grafo evoluciona temporalmente de manera continua. El análisis realizado se centra en el estudio de la eficiencia, propiedad que evalúa la capacidad de la red para distribuir información o conectar sus distintos elementos (nodos). Como resultado del estudio se mejoran resultados previos, lo cual nos permite establecer analíticamente de manera más precisa rangos operacionales para el valor de la eficiencia en grafos de Albert-Barabási del tipo  $m = 1$  de cualquier tamaño, siendo  $m$  la tasa de crecimiento del grafo (es decir, el grado de los nodos introducidos en cada paso temporal). Asimismo, estudiamos la variación instantánea de la eficiencia como una magnitud significativa relacionada con la vulnerabilidad de la red para este tipo de modelos, también en el ámbito de la teoría del campo medio.

---

### Redes musicales

Javier M. Buldú  
*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Calle Tulipán s/n*  
*28933 - Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [javier.buldu@urjc.es](mailto:javier.buldu@urjc.es)  
 WWW: [www.escet.urjc.es/~fisica/personal/jmbuldu](http://www.escet.urjc.es/~fisica/personal/jmbuldu)

COLABORADORES: Pedro Cano (Music Technology Group, Universitat Pompeu Fabra), Massimiliano Zanin (Universidad Autónoma de Madrid)

Son muchos los sistemas, ya sean naturales, tecnológicos o sociales, que es posible representar mediante una red constituida por nodos y conexiones entre ellos. En algunos casos, este tipo de redes se pueden obtener a partir de objetos tangibles, como por ejemplo redes de potencia eléctrica, internet, redes de neuronas o interacciones entre

reactivos en una reacción química. En otros casos, pueden ser entidades abstractas, tales como las redes de amistad en una cierta comunidad de personas o los parecidos musicales entre canciones.

Durante la última década, el desarrollo y fácil acceso a grandes bases de datos, así como el incremento de la capacidad de computación han permitido el análisis detallado de las propiedades topológicas de gran variedad de redes existentes en la naturaleza. De esta manera se ha podido comprobar que muchas redes reales comparten características topológicas similares, a pesar de la complejidad inherente en cada una de ellas. Estos resultados, han producido un gran interés en el estudio de lo que se conoce como redes complejas [1], las cuales tienen propiedades que las diferencian de redes más o menos regulares e incluso de redes generadas aleatoriamente, siendo su estructura irregular, compleja y con una dinámica que evoluciona en el tiempo.

En el presente trabajo nos centraremos en el estudio de redes complejas obtenidas en entornos musicales, comparando sus propiedades con otros tipos de redes complejas, ya sean redes existentes en la naturaleza o redes artificiales generadas por modelos teóricos. En una primera parte del trabajo, analizaremos la estructura de diversas redes de recomendación musical. Este tipo de redes, accesibles a través de internet, pueden haber sido generadas mediante la opinión ponderada de un gran número de usuarios, o mediante la opinión de una serie de expertos musicales. Veremos que mediante el análisis de la estructura de la red es posible obtener algunas pistas sobre como ha sido diseñada la red de recomendación musical [2], así como que estrategia es la más adecuada para moverse dentro de ella. Pero no sólo el parecido entre canciones puede dar lugar a una "red musical". Las colaboraciones entre artistas pueden ser también los enlaces que generarían otra posible red compleja. Comparando la red de colaboraciones entre artistas con la red de similitud musical, podemos sacar algunas conclusiones sobre como influyen las colaboraciones musicales en reducir distancias entre artistas musicalmente diferentes [3]. Finalmente, estudiaremos la estructura de la red obtenida mediante la proyección de las conexiones sintácticas entre palabras de un texto escrito y, por otro lado, la red obtenida mediante proyección de las conexiones entre notas dentro de una canción. De esta manera, mostraremos las similitudes y diferencias entre ambos tipos de redes, es decir, entre lenguaje escrito y lenguaje musical.

## Bibliografía

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang, *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports, **424**, 175 (2006).
- [2] P. Cano, O. Celma, M. Koppenberger and J.M. Buldú, *Topology of music recommendation networks*, Chaos, **16**, 013107 (2006).
- [3] J. Park, O. Celma, M. Koppenberger, P. Cano and J. M. Buldú, *The social network of contemporary popular musicians*, International Journal of Bifurcations and Chaos (en prensa) (2007).

## Modelos generalizados de enlace preferencial en redes complejas heterogéneas

Antonio Santiago

*Grupo de Sistemas Complejos*

*E.T.S.I. Agrónomos*

*Universidad Politécnica de Madrid*

*28040 - Madrid, España*

E-MAIL: [antonio.santiago@upm.es](mailto:antonio.santiago@upm.es)

COLABORADORES: Rosa Benito

En el área de las *redes complejas* [1] los denominados *modelos dinámicos* han atraído una gran atención durante la última década. Un modelo dinámico de red [2] es un sistema dinámico -generalmente de naturaleza estocástica- en tiempo discreto que prescribe la evolución de una red mediante la adición o eliminación de nodos y enlaces. Entre los modelos dinámicos, el modelo de *enlace preferencial* de Barabási-Albert [3] ocupa un lugar preferente en la literatura contemporánea. El modelo de enlace preferencial constituye una explicación de carácter mínimo de los mecanismos suficientes para la emergencia de redes complejas denominadas *libres de escala* [4], esto es, con un escalado en ley de potencia en la distribución de sus grados de conectividad.

En nuestro grupo hemos estudiado una generalización del modelo de enlace preferencial a redes complejas heterogéneas [5] cuyos nodos pueden caracterizarse por propiedades intrínsecas. La generalización se realiza imponiendo una estructura métrica sobre los estados y las afinidades de los nodos de la red y preservando los mecanismos originales de crecimiento y enlace preferencial. Hemos definido formalmente dos clases generales de modelos de enlace preferencial en redes heterogéneas donde las afinidades entre los estados de los nodos sesgan las probabilidades de adquisición de enlaces en una regla generalizada de enlace preferencial.

Hemos estudiado mediante métodos analíticos y numéricos las distribuciones de los grados de conectividad en las dos clases formuladas. Los resultados analíticos muestran que en el límite termodinámico los grados en todos los modelos de estas clases exhiben un comportamiento más rico que en el modelo homogéneo original de Barabási-Albert [6, 7]. Esto se hace patente en la existencia de un fenómeno de multiescalado en las densidades estacionarias de los grados, que implica un escalado en ley de potencia en la distribución estacionaria de los grados cuyo exponente depende de la forma específica de heterogeneidad en el mecanismo de enlace. Los resultados de la simulación numérica de algunos modelos en estas clases corroboran los resultados analíticos e indican que la introducción de los efectos de tamaño finito no altera fundamentalmente los fenómenos de escalado predichos.

## Bibliografía

- [1] S. H. Strogatz, *Exploring complex networks*, Nature **410** (Marzo 2001) 268-276.
- [2] S. N. Dorogovtsev y J. F. F. Mendes, *Evolution of networks*, Adv. Phys. **51** (2002) 1079-1187.
- [3] A.-L. Barabási y R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286** (1999), 509-512.

- [4] A.-L. Barabási y E. Bonabeau, *Scale-free networks*, Sci. Am. **288** (2003) 60-69.
- [5] B. Soderberg, *A general formalism for inhomogeneous random graphs*, Phys. Rev. E **66** (2002) 066121.
- [6] A.-L. Barabási, R. Albert y H. Jeong, *Mean-field theory for scale-free random networks*, Physica A **272** (1999) 173-197.
- [7] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes y A. N. Samukhin, *Structure of growing networks with preferential linking*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 4633-4636.

---

## Sesión 29: Dinámica de resonadores

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

Modera: Eugenio Roldán

---

### Generación paramétrica en resonadores acústicos

Víctor Espinosa  
*Departament de Física*  
*Universitat Politècnica de València*  
*Crta. Nazaret-Oliva, s/n*  
*46730 Grau de Gandia (València), Spain*

E-MAIL: [vespinos@fis.upv.es](mailto:vespinos@fis.upv.es)  
 WWW: <http://nlp.webs.upv.es/>

COLABORADORES: V. J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona y J. Redondo

El sistema estudiado es un resonador acústico con un medio no lineal de segundo orden en su interior, en este caso agua. En este sistema tiene lugar la generación paramétrica (se inyecta un campo de presión externo de una determinada frecuencia, y a partir de un determinado valor umbral de la inyección, se generan dos nuevas frecuencias, de forma que la suma de éstas es la misma que la del campo inyectado). El proceso de generación paramétrica de sonido es análogo a la oscilación óptica paramétrica en óptica no lineal. El estudio teórico de la dinámica tanto temporal, prediciendo regiones de biestabilidad, así como la existencia de una bifurcación de Hopf, como espacio-temporal del sistema, prediciendo la formación de patrones espaciales, se llevó a cabo anteriormente. El dispositivo experimental está en funcionamiento y permite estudiar la dinámica temporal del resonador. Los resultados experimentales obtenidos muestran escenarios correspondientes a distintas bifurcaciones: por un lado, se ha observado la generación de subarmónicos, tanto en el caso degenerado (las dos frecuencias generadas son iguales) como en el no degenerado y por otro, y lo que es de mayor relevancia, se han observado indicios de la bifurcación de Hopf. Esta bifurcación, hasta lo que sabemos, no ha sido observada tampoco en el campo de la óptica, por lo que su confirmación vendría a verificar también la validez de los modelos en el caso de la oscilación óptica paramétrica.

## Bibliografía

- [1] V. J. Sanchez-Morcillo *et al.*, Acta Acustica United with Acustica **92** (2006) 210-216.
- [2] I. Perez-Arjona and V. J. Sanchez-Morcillo, Phys. Rev. E **72**, 066202 (2005).

---

### Comparación de estructuras topológicas experimentales y teóricas en señales caóticas de un láser de fibra dopada con erbio

Javier Used Villuendas  
*Universidad de Zaragoza*  
*Facultad de Ciencias,*  
*c/ Pedro Cerbuna, 12*  
*Zaragoza, 50009*

E-MAIL: [jused@unizar.es](mailto:jused@unizar.es)

COLABORADORES: Juan Carlos Martín Alonso

La respuesta de un láser de anillo de fibra dopada con erbio cuando el bombeo es modulado de forma sinusoidal, depende en gran medida de los parámetros característicos de la señal de bombeo (valor medio, índice de modulación, frecuencia...) llegando a observarse comportamientos caóticos en la respuesta de láser para ciertos valores de éstos.

Estos comportamientos son caracterizados usando el análisis topológico, es decir, basándonos en la teoría de nudos, para lo cual procederemos a la detección de órbitas periódicas inestables en la respuesta y a calcular sus invariantes topológicos, llegando a caracterizar el comportamiento caótico por una estructura a la que llamaremos "plantilla". La estructura de la plantilla asociada a un régimen caótico, define de forma precisa la organización topológica global del atractor.

En el montaje experimental con el que trabajamos se llevaron a cabo barridos para diferentes parámetros de la señal de bombeo, lo que nos llevó a la obtención de atractores caóticos con distintas topologías dependiendo de dichos parámetros. Estos resultados permiten poner a prueba los modelos de láser desarrollados, con el fin de comprobar si las nuevas estructuras pueden ser reproducidas de forma numérica.

En nuestro trabajo presentaremos una comparación entre las plantillas obtenidas experimentalmente y las que surgieron numéricamente utilizando un modelo simplificado de láser de anillo.

---

### Control del retraso en la sincronización de los láseres de semiconductor

Cristina Martínez González  
*Departament de Física i Enginyeria Nuclear,*  
*Universitat Politècnica de Catalunya,*  
*c/ Colom 11, E-08222 Terrassa, Barcelona, Spain*

E-MAIL: [cristina.martinez-g@upc.edu](mailto:cristina.martinez-g@upc.edu)

COLABORADORES: M. Carmen Torrent, Jordi García-Ojalvo

Un láser de semiconductor solitario no puede mostrar características caóticas debido a que se describe totalmente con sólo dos variables independientes: el campo eléctrico

y la densidad de portadores, y tiene un punto fijo como solución. En este sentido sólo añadiendo un grado adicional de libertad se permite el caos. Hay diversas formas de aumentar grados de libertad para llevar los láseres de semiconductor hacia el caos desde la solución estable. Cuando añadimos una cavidad acoplada externa al láser, el sistema, desde un punto de vista matemático, pasa a tener dimensión infinita debido al retraso temporal. Si la cavidad externa está formada por un espejo que reintroduce la emisión láser de un tiempo  $\tau_f$  anterior, se produce un acoplamiento entre la luz emergente en el tiempo  $t$  con la emitida en un tiempo anterior  $t - \tau_f$ . En este caso tendremos un láser con feedback óptico. Si la cavidad externa la forma otro láser que también emite luz estable, situado a una distancia  $L_c$ , la radiación emitida por el láser a un tiempo  $t$  interacciona con la emitida por el otro láser a un tiempo  $t - \tau_c$ . En este último caso tendremos acoplamiento entre los dos láseres y dependiendo de cómo éste actúe podemos distinguir dos casos:

- Acoplamiento unidireccional. Un láser LD1 recibe la luz de un láser LD2. [4]
- Acoplamiento bidireccional. Un láser LD1 recibe la luz de un láser LD2 que a su vez es inyectado por la luz emitida por LD1. Hay acoplamiento mutuo. [5]

En cualquiera de estos dos casos aparecen diferentes regímenes caóticos [3]. En nuestro caso nos centramos en la dinámica de las oscilaciones de baja frecuencia o low frequency fluctuations. Se observa para corrientes de bombeo cerca del valor umbral, y niveles de inyección o feedback bajos. En este régimen, el láser muestra saltos de intensidad a intervalos de tiempo irregulares (del orden de decenas de nanosegundos), que de hecho corresponden a la envolvente de pulsos más rápidos, de decenas de picosegundos. Debido a esta relación entre las frecuencias propias del sistema, las envolventes se llaman fluctuaciones de baja frecuencia (LFF).

La dinámica de dos sistemas caóticos se puede sincronizar debido al acoplamiento. En el caso de láseres de semiconductor se puede obtener sincronización de las intensidades de emisión con acoplamiento, con o sin feedback. En el caso de acoplamiento unidireccional la dinámica de LFF sólo existe si el láser que inyecta la luz tiene feedback óptico (ya tiene dinámica de LFF por sí solo). Cuando obtenemos salidas sincronizadas, las dos intensidades muestran un desplazamiento igual al tiempo que tarda la luz en viajar de un láser al otro (tiempo de acoplamiento  $\tau_c$ ). El láser avanzado se considera el líder (leader) de la dinámica, mientras que el que le sigue es el rezagado (laggard). La sincronización caótica entre dos láseres acoplados bidireccionalmente muestra salidas que alternan el rol de líder entre ambos, cuando tienen la misma frecuencia de emisión. En este caso no es necesario que ninguno de ellos tenga dinámica individual ya que se afectan mutuamente.

En nuestro trabajo intentamos comprender tanto numérica como experimentalmente como afectan los diferentes parámetros de acoplamiento en este cambio de rol cuando pasamos de una configuración unidireccional a una bidireccional.

## Bibliografía

- [1] R. Vicente, T. Pérez, and C.R. Mirasso. *Open-versus closed-loop performance of synchronized chaotic external-cavity semiconductor lasers*, IEEE J. Quantum Electron. **38**, 1197 (2002).
- [2] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, J. Mulet, and C.R. Mirasso. *Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers*, Phys. Rev. Lett. **86**, 795 (2001).
- [3] B. Krauskopf, S. Wicczorek, and D. Lenstra. *Different types of chaos in an optically injected semiconductor laser*, App. Phys. Letters **77**, 1611 (2000).
- [4] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Anovazzi-Lodi, P. Coler, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C.R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore. *Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links*, Nature **438**, 343 (2005).
- [5] P. Balenzuela, and J. Garcia-Ojalvo. *Neural mechanism for binaural pitch perception via ghost stochastic resonance*, Chaos **15**, 023903 (2005).
- [6] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, and U. Alon. *Network motifs: simple building blocks of complex networks*, Science **298**, 824 (2002).

---

## Sesión 30: Orden en sistemas dinámicos estocásticos

Viernes 8 de Junio (18:15–19:15)

Moderador: Carlos Escudero

---

### Efecto de la memoria en redes Booleanas.

Juan Pablo Cárdenas Villalobos

Grupo de Sistemas Complejos - UPM

ETSI Agrónomos

C. Universitaria

28040, Madrid

E-MAIL: [jpcardenas.agronomos](mailto:jpcardenas.agronomos), [ramon.alonso@upm.es](mailto:ramon.alonso@upm.es)

WWW: <http://uncomp.uwe.ac.uk/alonso-sanz>

COLABORADORES: Ramón Alonso-Sanz

Los autómatas celulares (AC) y redes Booleanas (BN) convencionales, son *ahistóricos*: la regla de transición opera sobre la última configuración. En trabajos anteriores hemos estudiado el efecto de la memoria (modelo *histórico*) en (AC) con topología regular invariante [1] y con estructura dinámica [2].

En esta contribución nos proponemos estudiar el efecto de la memoria en AC y BN con estructura regular y con recableado aleatorio (*random rewiring*). A este efecto, comparamos patrones sucesivos de su dinámica (Fig. 1) y medimos la propagación del daño (*damage spreading*) (Fig. 2).

Nuestros resultados sugieren que la memoria podría actuar como un controlador del desorden de redes que evolucionan en un régimen desordenado producto de un grado

de conectividad  $K$  superior a un crítico  $K_c$ . Sin embargo, resultados no esperados aparecen de la interacción entre la memoria y la topología del sistema.

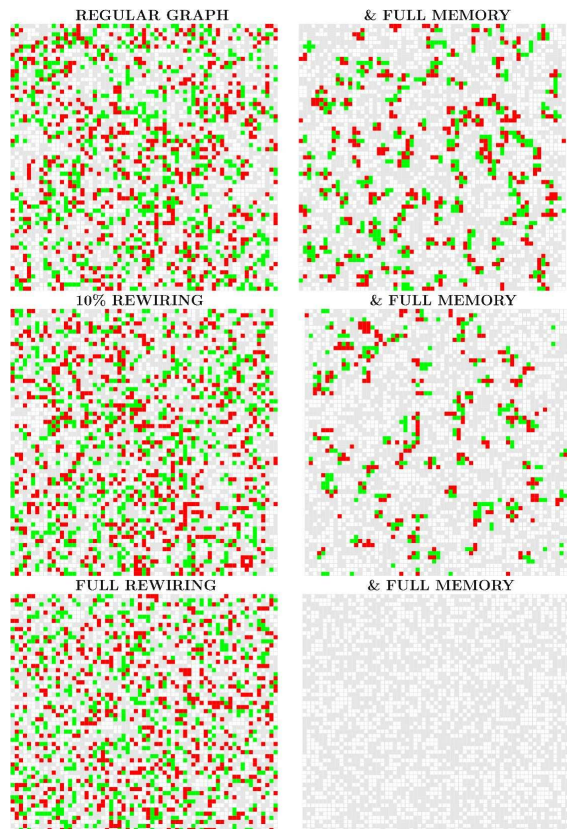


Fig. 1: Efecto de la memoria completa sobre la dinámica de una red Booleana con estructura regular y cuatro inputs. Efecto en un retículo con un 10 % de recableado y recableado completo.  $0 \rightarrow 1$  rojo,  $1 \rightarrow 0$  verde,  $1 \rightarrow 1$  gris,  $0 \rightarrow 0$  blanco .

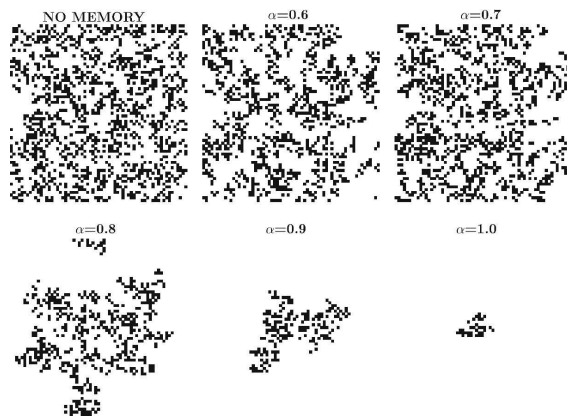


Fig. 2: Efecto de la memoria sobre la propagación del daño (*damage spreading*) en una red Booleana con cuatro inputs y red de conexiones regular. Evaluación de distintos grados de memoria  $\alpha$ .

## Bibliografía

[1] R. Alonso-Sanz, M. Martin, *Elementary Cellular Automata with Elementary Memory Rules in Cells: the case of linear rules*, *J. of Cellular Automata* **1** (2006) 70–86.

[2] R. Alonso-Sanz, *A Structurally Dynamic Cellular Automaton with Memory*. *Chaos, Solitons & Fractals* **32** (2006) 1285–1295.

## Sobre la paradoja de Parrondo

Antonio Linero Bas  
 Departamento de Matemáticas  
 Universidad de Murcia  
 Campus de Espinardo  
 30100 - Espinardo, Murcia

E-MAIL: [lineroba@um.es](mailto:lineroba@um.es)

A grandes rasgos, la paradoja de Parrondo establece que, a partir de dos juegos que, individualmente, producen pérdidas, podemos conseguir combinaciones estocásticas de ellos de modo que el juego resultante produzca beneficios.

En esta charla presentaremos cómo trasladar la paradoja de Parrondo al ambiente de los sistemas dinámicos discretos. Ahora, los conceptos de beneficio o pérdida se sustituyen por los de caos (en varias de sus acepciones) y simplicidad, y mostramos cómo a partir de sistemas simples se pueden obtener composiciones caóticas, y viceversa.

## Bibliografía

[1] L.S. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in one dimension*, Lecture Notes in Math. **1513**, Springer, Berlin (1992).

[2] J.S. Cánovas, A. Linero, D. Peralta-Salas, *On the Parrondo's paradox*, *Phys. D* **218** (2006), pp. 177-184.

[3] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, California (1989).

[4] G.P. Harmer, D. Abbot, *Losing strategies can win by Parrondo's paradox*, *Nature* **402** (1999), 864.

## Transición de fase en un algoritmo estocástico de generación de primos.

Bartolo Luque  
 Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
 ETSI Aeronáuticos  
 Universidad Politécnica de Madrid

E-MAIL: [bartolo@dmae.upm.es](mailto:bartolo@dmae.upm.es)

WWW: <http://www.dmae.upm.es/bartolo.html>

COLABORADORES: Lucas Lacasa (UPM), Octavio Miramontes (UNAM, México)

Se suele presentar a los primos como los átomos de la aritmética. En este trabajo estiramos la analogía presentando un gas reactivo de números, una química artificial, capaz de generar primos de forma estocástica. Veremos que el sistema presenta una transición de fase orden-desorden de tipo percolación y apuntaremos

qué relación tiene con otros problemas de búsqueda recientemente estudiados en ciencias de la computación.

## Sesión 31: Campos analíticos y/o complejos

Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)

Moderador: Lluís Alsedà

### Linearización de campos vectoriales $C^\infty$ en el plano $\mathbb{C}^2$ mediante simetrías de Lie

Susanna Maza

Departament de Matemàtica. Universitat de Lleida.  
Avinguda Jaume II, 69. 25001 Lleida

E-MAIL: [smaza@matematica.udl.es](mailto:smaza@matematica.udl.es)

WWW: <http://web.udl.es/dept/matematica/ssd/>

COLABORADORES: Isaac A. García (Universitat de Lleida) y Jaume Giné (Universitat de Lleida)

El objetivo de este trabajo consiste en hallar un cambio de variables definido en un entorno de un punto singular de un sistema diferencial (o campo vectorial) autónomo y  $C^\infty$  en el plano que linearice el sistema. Este clásico problema se remonta a la época de Poincaré y está enmarcado en un contexto más general conocido como formas normales de Poincaré–Dulac. En este trabajo no seguimos la vía clásica de la teoría de formas normales. Por el contrario, se utiliza una reciente caracterización de los sistemas linearizables en un entorno de un punto singular basada en la existencia de un generador infinitesimal de una simetría de Lie en dicho entorno con una parte lineal concreta.

Consideremos un sistema bidimensional autónomo y de clase  $C^\infty$  definido en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{C}^2$  con un punto singular en  $U$ . Supongamos que el sistema posee parte lineal en un entorno del punto singular. Entonces, mediante una traslación y un cambio lineal de coordenadas, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el punto singular está localizado en el origen y que la parte lineal se ha transformado a la forma canónica de Jordan, es decir,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

con  $f$  y  $g$  funciones  $C^\infty(U)$  tal que  $f(0, 0) = g(0, 0) = \partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = \partial_x g(0, 0) = \partial_y g(0, 0) = 0$ , y siendo la matriz de la parte lineal  $J$  o bien semisimple o bien semisimple+nilpotente

$$(i) J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (ii) J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Definimos  $\mathcal{X} = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y$  como el campo vectorial asociado al sistema (1).

El problema de la linearización (local) consiste en determinar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un entorno  $\mathcal{U} \subset U$  del origen y un cambio  $\phi \in C^\infty(\mathcal{U})$  de variables tangente a la identidad

$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$  de la forma  $\phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + o(x, y), y + o(x, y))$  que lineariza el campo vectorial  $\mathcal{X}$  (o el sistema (1)), es decir,  $\phi_*\mathcal{X} = \mathcal{X}_J$  siendo  $\phi_*$  el “push-forward” asociado al difeomorfismo  $\phi$ . Recientemente se ha demostrado que, la existencia de  $\phi$  es equivalente a la existencia de un campo vectorial  $\mathcal{Y} \in C^\infty(\mathcal{U})$  de la forma  $\mathcal{Y} = (x + o(x, y))\partial_x + (y + o(x, y))\partial_y$  que conmuta con  $\mathcal{X}$ , es decir,  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \equiv 0$  donde el corchete utilizado es el corchete de Lie. Dicho de otro modo,  $\mathcal{Y}$  es un centralizador de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{U}$  y, en particular, genera un grupo local 1–paramétrico de simetrías de Lie de  $\mathcal{X}$ .

Nuestro resultado principal muestra como hallar el cambio linearizante  $\phi$  a partir del conocimiento de un conmutador.

Presentamos el resultado particularizado al caso de que la parte lineal  $J$  de  $\mathcal{X}$  es semisimple y con autovalores asociados diferentes.

**Teorema.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}^2$  un entorno abierto del origen. Sean  $\mathcal{X} = P(x, y)\partial_x + Q(x, y)\partial_y = (\lambda x + \dots)\partial_x + (\mu y + \dots)\partial_y$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq \mu$  y  $\mathcal{Y} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y = (x + \dots)\partial_x + (y + \dots)\partial_y$ , campos vectoriales de clase  $C^\infty(U)$  verificando  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \equiv 0$ . Entonces, un cambio de variables tangente a la identidad  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$  de la forma  $\phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + o(x, y), y + o(x, y))$  definido en  $\mathcal{U} \subseteq U$  entorno del origen con  $\phi \in C^\infty(\mathcal{U})$  que lineariza el campo vectorial  $\mathcal{X}$  se obtiene de la forma

$$u = g(I) \left( \frac{f(H)}{g^\mu(I)} \right)^{\frac{1}{\mu-\lambda}}, \quad v = \left( \frac{f(H)}{g^\mu(I)} \right)^{\frac{1}{\mu-\lambda}}, \quad (3)$$

donde  $H$  e  $I$  son integrales primeras de  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , respectivamente, asociadas al inverso de factor integrante  $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} = P\eta - Q\xi$  y  $f$  y  $g$  son dos funciones tal que  $f(H(x, y)) = (x + \dots)^\mu / (y + \dots)^\lambda$  y  $g(I(x, y)) = (x + \dots) / (y + \dots)$ .

### Sobre una conjetura de Morse para flujos analíticos sobre superficies

Gabriel Soler López

Universidad Politécnica de Cartagena  
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
Paseo Alfonso XIII, 52  
30203-Cartagena

E-MAIL: [gabriel.soler@upct.es](mailto:gabriel.soler@upct.es)

WWW: <http://filemon.upct.es/~gabi>

COLABORADORES: Habib Marzougui (Faculty of Sciences of Bizerte)

Un flujo sobre una superficie,  $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ , se dice *topológicamente transitivo* si existe una órbita densa, es decir, existe  $u \in S$  tal que  $\overline{\Phi(\mathbb{R} \times \{u\})} = S$ . Diremos que el flujo  $\Phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$  es *métricamente transitivo* si los únicos subconjuntos (cerrados) invariantes tienen medida cero o medida completa.

Un flujo métricamente transitivo sobre una superficie compacta siempre es topológicamente transitivo. El recíproco sabemos que no siempre es cierto. No obstante T. Ding en 1999 (resp. H. Marzougui en 2002) probó este recíproco cuando el flujo tiene una cantidad finita (resp. numerable) de singularidades.

M. Morse propuso demostrar que la transitividad topológica implica transitividad métrica para flujos analíticos

sobre superficies. El objetivo de la charla es explicar que esta implicación es cierta basándonos en la descripción del conjunto de puntos singulares de un flujo analítico hecha en un trabajo reciente de V. Jiménez y J. Llibre.

### Medallones de espiral múltiple en el conjunto de Mandelbrot

Gerardo Pastor  
 Instituto de Física Aplicada, CSIC  
 Serrano 144, 28006 Madrid, España  
 Tel: +34-91 561 88 06

E-MAIL: gerardo@iec.csic.es  
 WWW: http://www.iec.csic.es

COLABORADORES: M. Romera, G. Alvarez, J. Nunez, D. Arroyo, A. B. Orue y F. Montoya.

En el conjunto de Mandelbrot podemos encontrar unas vistosas decoraciones de simetría central que nosotros denominamos medallones de espiral múltiple [1]. Un medallón de espiral múltiple está formado por infinitos “babys” del conjunto de Mandelbrot ordenados en espirales de múltiples padres. En [1] presentamos dos conjeturas en las que se supone que un baby de un medallón de espiral múltiple descende de un “padre” y un “gen”. En este trabajo, señalamos que puede utilizarse una extensión de un nuevo algoritmo nuestro para calcular las expansiones binarias de los argumentos externos [2] de los babys en los medallones de espiral múltiple.

### Expansiones binarias de los babys de un medallón de espiral múltiple

Consideremos un MSM sobre el tendril de un mid-geet que nosotros denominamos padre  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ . El padre está situado en una rama del shrub [3] de un disco que nosotros denominamos gen  $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ . Fijémonos que  $\bar{g}_1 < \bar{p}_1 < \bar{p}_2 < \bar{g}_2$  dado que el padre está en el interior de la estela del gen,

Sea  $\bar{p}_*$  bien  $\bar{p}_1$  ó bien  $\bar{p}_2$ , y sea  $\bar{g}_*$  bien  $\bar{g}_1$  ó bien  $\bar{g}_2$ . De acuerdo con nuestras observaciones, podemos enunciar la siguiente conjetura:

*Conjetura 1:* Las expansiones binarias del baby central,  $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ , de un MSM pueden obtenerse a partir de la composición de las expansiones binarias del padre y del gen de la siguiente forma:

$$(\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \left( \underbrace{\overline{p_* p_* \dots p_* g_*}}_i, \underbrace{\overline{p_* p_* \dots p_* g_*}}_i \right). \quad (1)$$

Consideremos el caso  $i = 3$ . Primero, escribimos la secuencia ordenada de  $2^4$  expansiones binarias: (1)  $\overline{p_1 p_1 p_1 g_1}$ , (2)  $\overline{p_1 p_1 p_1 g_2}$ , (3)  $\overline{p_1 p_1 p_2 g_1}$ , ... (15)  $\overline{p_2 p_2 p_2 g_1}$ , (16)  $\overline{p_2 p_2 p_2 g_2}$ . Segundo, reordenamos cíclicamente estas expansiones binarias en parejas según la Fig. 1, creando los pares de expansiones binarias (1, 16), (2, 3), (4, 5), ... (14, 15).

Esto que estamos viendo para  $i = 3$ , lógicamente puede generalizarse para cualquier  $i$ .

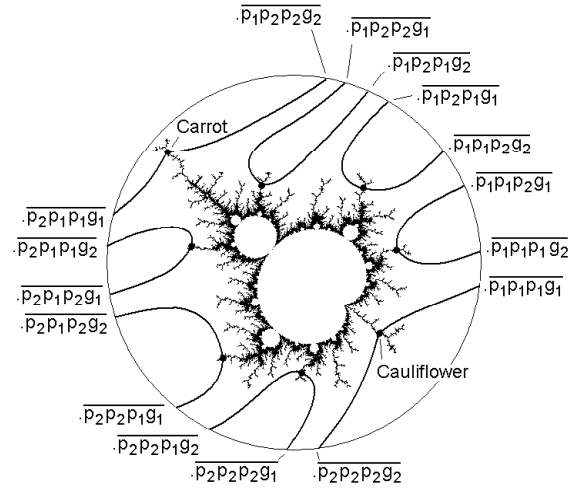


Fig 1: Croquis del ordenamiento de las expansiones binarias de los babys centrales en los medallones de espiral múltiple.

*Conjetura 2:* Cada una de las expansiones binarias de un baby no-central,  $\bar{\beta}_*$ , de un MSM puede obtenerse a partir de la composición de las expansiones binarias del baby central y del padre de la siguiente forma:

$$\bar{\beta}_* = \overline{b_* \underbrace{p_* p_* \dots p_*}_j}. \quad (2)$$

Teniendo en cuenta la conjetura 1, cada una de las expansiones binarias del baby no-central puede escribirse como:

$$\bar{\beta}_* = \overline{\underbrace{p_* p_* \dots p_* g_*}_i \underbrace{p_* p_* \dots p_*}_j}. \quad (3)$$

Para un valor dado de  $j$ , podemos escribir  $2^{j+1}$  expansiones binarias de  $\bar{\beta}_*$ . Si calculamos sus secuencias kneading [4], podemos agrupar las expansiones binarias en  $2^j$  pares en los que los dos argumentos externos de cada par tienen la misma secuencia kneading. De esta manera, podemos obtener todos los babys no-centrales de un determinado MSM.

Por otra parte, hemos desarrollado un nuevo algoritmo para calcular, en general, los argumentos externos del conjunto de Mandelbrot. Como hemos podido verificar, puede utilizarse una extensión de este algoritmo para calcular las expansiones binarias de los babys en los MSMs. Con esta nueva herramienta hemos avanzado significativamente en el estudio de los MSMs.

### Bibliografía

- [1] M. Romera, G. Pastor, G. Alvarez y F. Montoya, *External arguments in the multi-spiral medallions of the Mandelbrot set*, Computers and Graphics, **30** (2006) 461-470.
- [2] A. Douady y J.H. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, Comptes Rendus de L'Academie des Sciences, Paris, Ser. I **294** (1982) 123-126.
- [3] G. Pastor, M. Romera, G. Alvarez y F. Montoya, *Shrubs in the Mandelbrot set ordering*, International

Journal of Bifurcation and Chaos, **13** (2003) 2279-2300.

- [4] E. Lau, D. Schleicher, *Internal addresses in the Mandelbrot set and irreducibility of polynomials*, Stony Brook IMS preprint 94-19 (1994).

## Ciclicidad del anillo de periodo en una familia de centros nilpotentes

Maite Grau Montaña  
 Departament de Matemàtica  
 Universitat de Lleida  
 Avda. Jaume II, 69  
 25006 Lleida

E-MAIL: [mtgrau@matematica.udl.es](mailto:mtgrau@matematica.udl.es)  
 WWW: <http://web.udl.es/dept/matematica/ssd>

COLABORADORES: Lubomir Gavrilov (Université Paul Sabatier), Jaume Giné (Universitat de Lleida)

Consideramos la siguiente familia de centros nilpotentes en el plano real

$$\dot{x} = y + x^{2n}, \quad \dot{y} = 2ncx^{4n-1},$$

donde  $n$  es un número natural y  $c$  es un real con  $c < -1/4$ . Bajo la hipótesis que la primera función de Melnikov es no idénticamente nula, encontramos una cota superior para la ciclicidad del anillo de periodo en términos del grado del sistema.

## Sesión 32: Análisis de series temporales

Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)

Moderador: Francisco Balibrea

### Geometric Noise Reduction for Multivariate Time Series

M. Eugenia Mera  
 Dpto. Fundamentos del Análisis Económico I  
 Universidad Complutense  
 28223 Madrid, Spain

E-MAIL: [mera@ccee.ucm.es](mailto:mera@ccee.ucm.es)

COLABORADORES: Manuel Morán

Un problema de reducción de ruido se plantea cuando una secuencia de estados (serie temporal) de un sistema generado por una ley determinista se registra usando un sistema de medición sujeto a error. Se han propuesto muchos algoritmos para minimizar la pérdida de información acerca del comportamiento del sistema que introduce ese error.

Nosotros abordamos [2] el problema de reducción de ruido en series vectoriales. Este caso es importante en experimentos de laboratorio o en procesos reales en los que las variables de estado de un sistema dinámico multivariante

pueden medirse a través del tiempo. Proponemos un algoritmo de reducción de ruido que, al igual que muchos de los algoritmos existentes, está basado en las mejores estimaciones lineales locales para la dinámica diferenciable desconocida. Sin embargo, mientras los algoritmos existentes usan ajustes mínimo cuadráticos, el nuestro se basa en la teoría estadística desarrollada para modelos con errores de medida [1] (modelos de regresión lineal donde, como sucede en los problemas de reducción de ruido, tanto las variables dependientes como las independientes están sujetas a error).

Otro propósito de nuestro enfoque es recuperar la regularidad estadística a largo plazo de la dinámica subyacente, más que intentar separar el ruido de la verdadera señal que es el enfoque de los algoritmos existentes. Nuestros resultados parecen indicar la existencia de cotas intrínsecas para la predicción puntual exacta de la verdadera dinámica, aunque la predicción exacta de su comportamiento a largo plazo sería posible, al menos para ruidos pequeños.

Proporcionamos evidencia empírica de la eficiencia de nuestro algoritmo en series generadas por las dinámicas de Henon y Lorenz perturbadas por ruidos de medición con amplitudes bajas y altas, y para series temporales que van desde 500 a 5000 puntos. En el caso de series cortas obtenemos del orden de un 80 % de reducción en términos de distancia de la serie al atractor. En el caso de series largas obtenemos niveles más altos de reducción (por encima del 95 %). Esto nos permite recuperar detalles finos de la estructura geométrica del atractor.

También demostramos que nuestro algoritmo, junto con otros de los más comúnmente utilizados en reducción de ruido, pueden englobarse en un mismo marco: todos ellos están basados en proyecciones ortogonales, con respecto de alguna métrica, en los subespacios lineales óptimos.

## Bibliografía

- [1] W. A. Fuller, *Measurement Error Models*, John Wiley and Sons (1987).  
 [2] M. E. Mera and M. Morán, *Geometric Noise Reduction for Multivariate Time Series*, *Chaos* **16**, 013116 (2006).

### Interpolación con redes neuronales artificiales en las series temporales intervenidas para la predicción de la demanda arbana de agua

Manuel Herrera  
 Centro Multidisciplinar de Modelación de Fluidos (CMMF)  
 Universidad Politécnica de Valencia  
 Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente  
 Camino de Vera s/n  
 46022 - Valencia

E-MAIL: [mahefe@gmmf.upv.es](mailto:mahefe@gmmf.upv.es)  
 WWW: <http://www.gmmf.upv.es>

COLABORADORES: Juan Carlos García (Dpto. Estadística), Javier Martínez (CMMF), Amparo López (CMMF)

Este trabajo incide en la utilidad de las ANN (Artificial Neural Networks) como herramienta para el análisis



de modelos ARIMA (AutoRegresive Integrated Moving Average) intervenidos, en el estudio del caso real de una serie de tiempo de la demanda de agua. Las ANN ofrecen una alta fiabilidad, inmediatez y flexibilidad en los análisis. Se propone su coordinación con el uso de los modelos ARIMA, como alternativa de interpolación de los datos de la serie a estudio. El modelo final es un ARIMA, que ofrece ese carácter explicativo del que carecen las ANN.

Durante los seis primeros meses del año 2005 se ha calculado la demanda horaria de agua, a lo largo de cada día, del pueblo de Alquerías (Murcia) para así modelar y predecir su comportamiento consumidor. Un fallo en las estaciones remotas de medición de caudal origina que los datos muestren, a lo largo de varios días consecutivos, demandas de agua negativas. Este hecho lleva a proponer el uso de las ANN como herramienta de uso interpolador y de reconstrucción instantánea de cualquier dato anómalo. Una vez depurada la serie de datos, se analiza con la metodología ARIMA, en este caso con intervención, ya que a partir de abril la media cambia bruscamente para estabilizarse en una superior, debido a un modificación en las presiones de consigna de las estaciones de bombeo. Se tomará un modelo de intervención con una función de transferencia de efecto permanente y de carácter instantáneo.

### Entropía de permutación topológica y aplicaciones

José María Amigó  
 Centro de Investigación Operativa  
 Universidad Miguel Hernández  
 Avda. de la Universidad s/n  
 03202 Elche (Alicante)

E-MAIL: [jm.amigo@umh.es](mailto:jm.amigo@umh.es)  
 WWW: <http://cio.umh.es>

COLABORADORES: Matthew B. Kennel (University of California in San Diego), Miguel A.F. Sanjuán y Samuel Zambrano (Universidad Rey Juan Carlos)

Los patrones ordinales, es decir, las relaciones de orden entre puntos consecutivos de una órbita, generan una descripción simbólica de una serie temporal u órbita que se diferencia de la dinámica simbólica convencional en que no precisa de una partición previa del espacio de estados (“coarse-graining”). De forma análoga a las entropías métrica y topológica, la entropía de permutación (en sus versiones métrica y topológica) cuantifica la diversidad de patrones ordinales que un sistema dinámico puede generar. En nuestra charla hablaremos de la generalización de la entropía de permutación a transformaciones en intervalos  $n$ -dimensionales y presentaremos algunos resultados recientes sobre la versión topológica. El resultado más importante es que la entropía de permutación topológica coincide con la entropía topológica si la transformación es expansiva. De ello se deduce que las órbitas de dichas transformaciones tienen siempre patrones ordinales prohibidos, esto es, no todas las relaciones de orden posibles pueden ocurrir, en contraste con el caso de series temporales aleatorias (órbitas generadas por sistemas dinámicos estocásticos), en las que todo patrón ordinal aparece con probabilidad uno. Un hecho interesante es que todo patrón prohibido genera, a su vez, una cadena de patrones prohibidos de longitudes

mayores que crece en número de forma superexponencial. Además, los patrones prohibidos son robustos contra el ruido, lo que posibilita constatar su presencia incluso en series temporales deterministas con altos niveles de ruido. Estos hechos se pueden aplicar, por ejemplo, a la discriminación entre series temporales deterministas y estocásticas.

### Bibliografía

- [1] J.M. Amigó, M.B. Kennel y L. Kocarev, *The permutation entropy rate equals the metric entropy rate for ergodic information sources and ergodic dynamical systems*, Physica D **210**, 77–95 (2005).
- [2] J.M. Amigó, L. Kocarev y J. Szczepanski, *Order patterns and chaos*, Phys. Lett. A **355**, 27–31 (2006).
- [3] J.M. Amigó y M.B. Kennel, *Topological permutation entropy*, Physica D (en prensa).
- [4] J.M. Amigó, S. Zambrano y M.A.F. Sanjuán, *True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics* (enviado).

---

### An study of air temperature dynamics by Non-Linear Time Series Analysis

María del Mar Artigao

Grupo de Investigación Interdisciplinar en Sistemas Dinámicos ( $GI^2SD$ )  
 Escuela Politécnica Superior de Albacete (EPSA)  
 Universidad de Castilla-La Mancha  
 02071 - Avenida de España s/n, Albacete

E-MAIL: [mariamar.artigao@uclm.es](mailto:mariamar.artigao@uclm.es)  
 WWW: <http://www.poincare.pol-ab.uclm.es>

COLABORADORES: Juan José Miralles, Juan Antonio Martínez, Manuel Sánchez

The paradigm of the chaos was introduced four decades ago. Since then, the concepts of irregular movements, imprecibility and sensitivity to the initial conditions have appeared in several fields, in a way ubiquitous. In particular, to determine if a dynamical system, which the temporal evolution from a time series is only known, shows these characteristics, it has been developed several methods and algorithms under the name of Nonlinear Time Series Analysis. These are based on the embedding theorems, and particularly, in the Takens reconstruction theorem. These algorithms allow us to study any dynamical system in terms of their possible nonlinear behaviour.

It remains open the question about the possible low dimensionality of the atmospheric dynamical system. In this work, the nonlinear analysis of a time series built from air temperature data is treated. These data have been acquired from the weather station located in our research center.

In previous works made by our group, time series of radiative temperature from remote sensing data have been recorded. These time series present a complex pattern of gaps structure (associate to acquisition problems, cloudy cover). This fact increases considerably the difficulty of nonlinear time series analysis. This is the reason to carry out this work like a pre-research. Our goal is the study of the air temperature. We hope in next works to deal with

the nonlinear time series analysis from remote sensing data.

## Bibliografía

- [1] F. Takens et al., *Detecting strange attractors in turbulence*, Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics **898**, 366–381 (1981).
- [2] H. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer, New York (1996).
- [3] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press (1999).

## Sesión 33: Dinámica de fluidos

Sábado 9 de Junio (9:30–11:00)

Modera: Francisco Marqués

### Soluciones temporales para un problema de convección con viscosidad variable

Francisco Pla  
 Depto. de Matemáticas  
 Universidad de Castilla-La Mancha  
 Facultad de Ciencias Químicas  
 c/Camilo Jose Cela, 3  
 Ciudad Real, 13071

E-MAIL: [francisco.pla@uclm.es](mailto:francisco.pla@uclm.es)  
 WWW: <http://matematicas.uclm.es/qui-cr/>

COLABORADORES: H.Herrero (Universidad de Castilla-La Mancha) y A. M. Mancho (IMAFF, CSIC).

Estudios sobre la formación de rocas en el interior de la tierra y de los planetas indican que la viscosidad depende fuertemente de la temperatura y esta dependencia es el fundamento para entender los movimientos de subducción y del manto terrestre [1, 4, 7]. Este es el motivo por el que estudiamos un problema de convección en el que la viscosidad es una función de la temperatura en las ecuaciones de Navier-Stokes.

En este trabajo se estudia, desde un punto de vista numérico, las soluciones temporales a nuestro problema de convección con una dependencia exponencial de la temperatura en una celda finita [5, 2] con condiciones rígidas-libres en la capa inferior y superior respectivamente, con calentamiento uniforme en el fondo de la celda y para pequeñas relaciones de aspecto. Se analizan las soluciones temporales en puntos de codimensión dos para distintas longitudes de celda variando el número de Rayleigh y otros parámetros en los casos en los que tenemos viscosidad constante y viscosidad fuertemente dependiente de la temperatura.

Se presenta igualmente un estudio de bifurcaciones en el que se comparan resultados de estabilidad para viscosidad constante [3] y para distintos perfiles de viscosidad variable [6].

## Bibliografía

- [1] J. Fröhlich, P. Laure, and R. Peyret, *Large departures from Boussinesq approximation in the Rayleigh–Bénard problem*, Phys. Fluids, A **4** (1992), 1355–1372.
- [2] Y. Ke and V.S. Solomatov, *Plume formation in strongly temperature-dependent viscosity fluids over a very hot surface*, Phys. Fluids, **16** (2004), 1059–1063.
- [3] J.Lega, *Defauts topologiques associés a la brisure de l'invariance de traslation dans le temps*, Thesis, U. de Nice, (1989).
- [4] M. Manga, D. Weeraratne and S.J.S. Morris, *Boundary-layer thickness and instabilities in Bénard convection of a liquid with a temperature-dependent viscosity*, Phys. Fluids, **13** (2001), 802–805.
- [5] L.-N. Moresi and V.S. Solomatov, *Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations*, Phys. Fluids, **7** (1995), 2154–2162.
- [6] F. Pla, H. Herrero, O. Lafitte, *Bifurcations in a convection problem with temperature-dependent viscosity*. En preparación.
- [7] R. Trompert and U. Hansen, *Mantle convection simulations with rheologies that generate plate-like behaviour*, Nature **395** (1998), 686–689.

### Control de estabilidad y transición catastrófica en un sistema de Taylor–Couette.

Marc Avila  
 Dep. Física Aplicada  
 Universidad Politécnica de Cataluña  
 Campus Norte, mod. B5  
 08034 Barcelona, España

E-MAIL: [marc@fa.upc.edu](mailto:marc@fa.upc.edu)  
 WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa/fluids/marc>

COLABORADORES: F. Marques, J.M. Lopez & A. Meseguer.

La aplicación de forzados temporales a sistemas físicos simples, gobernados por ecuaciones diferenciales, puede cambiar la estabilidad de ciertos estados del mismo. Un ejemplo clásico es el desplazamiento armónico en dirección vertical del punto de suspensión de un péndulo, que permite estabilizarlo cuando el peso se encuentra por encima del punto de suspensión. En sistemas hidrodinámicos, gobernados por ecuaciones en derivadas parciales, la aplicación de forzados temporales tiene consecuencias delicadas, ya que puede estabilizar e inestabilizar distintos modos espaciales simultáneamente. Para investigar el efecto de estos forzados en fluidos es clave la elección de un sistema ampliamente estudiado y donde los mecanismos de inestabilidad puedan ser aislados. El problema de fluido contenido entre dos cilindros en rotación, conocido como flujo de Taylor–Couette, es ideal para la implementación de estas ideas. En este sistema el único mecanismo de inestabilidad existente es la fuerza centrífuga. Cuando la velocidad de rotación del cilindro interior es lenta, el flujo resultante es puramente azimutal, mientras que aumentándola gradualmente el sistema sufre una lenta progresión de bifurcaciones que aumentan su complejidad espacio-temporal.

Investigaciones experimentales[1] en los noventa mostraron que el desplazamiento armónico en dirección axial

del cilindro interior podía estabilizar el flujo básico hasta valores muy superiores de la velocidad de rotación del cilindro. Marques & Lopez[2] realizaron un análisis de Floquet de este flujo periódico, confirmando los resultados experimentales y explicando el mecanismo de estabilización. Recientemente, se llevaron a cabo experimentos[3] para estudiar el efecto de este forzado en la dinámica no lineal del sistema. Sin embargo, los resultados contenían ruido que no podía ser identificado, no quedando claro su origen. En esta contribución mostramos que este ruido es debido a una sucesión de bifurcaciones que ocurren en pequeños incrementos de la velocidad de rotación del cilindro, de forma que la precisión experimental no permite detectarlas. El resultado destaca la importancia que tiene distinguir entre ruido debido a imperfecciones experimentales y ruido determinista debido a bifurcaciones secundarias.

## Bibliografía

- [1] Weisberg, Kevrekidis & Smits. *Delaying transition in Taylor–Couette flow with axial motion of the inner cylinder.*, J. Fluid Mech. **348**, 141–151 (1997).
- [2] Marques, F. & Lopez, J. M. *Taylor–Couette flow with axial oscillations of the inner cylinder: Floquet analysis of the basic flow.*, J. Fluid Mech. **348**, 153–175.
- [3] Sinha, M., Kevrekidis, I. G. & Smits, A. J. *Experimental study of a Neimark–Sacker bifurcation in axially forced Taylor–Couette flow.*, J. Fluid Mech. **558**, 1–32.

---

## Tratamiento de paredes en métodos de lattice Boltzmann para la simulación de flujo fluido

Salvador Izquierdo Estallo  
 Área de Mecánica de Fluidos y LITEC (CSIC)  
 Universidad de Zaragoza  
 María de Luna 10  
 50018 - Zaragoza

E-MAIL: [Salvador.Izquierdo@unizar.es](mailto:Salvador.Izquierdo@unizar.es)

COLABORADORES: Norberto Fueyo (AMF)

Los métodos de lattice Boltzmann son una aproximación mesoscópica a la simulación de flujo fluido. La ecuación de Boltzmann, discretizada en el espacio de velocidades microscópicas, permite recuperar la solución de Navier-Stokes incompresible sin necesidad de recurrir a técnicas tipo monte carlo para su resolución. Por lo tanto, es posible la simulación de procesos de interés en ingeniería de forma competitiva respecto a los métodos típicamente usados en fluidodinámica computacional (eg. Navier–Stokes resuelto con volúmenes finitos), y con la ventaja añadida de trabajar en base a principios fundamentales.

Uno de los principales problemas al afrontar simulaciones de aplicaciones industriales con este tipo de métodos es el tratamiento de las paredes. Adicionalmente, la naturaleza de estos problemas varía en función de las características del flujo (eg. microfluidos, flujo turbulento, medios porosos o flujos bifásicos). Expresados en función de números adimensionales los problemas son los siguientes: (i) a alto número de Knudsen el flujo se rarifica y la colisión de las moléculas en la pared genera deslizamiento a nivel macroscópico; (ii) a altos números de Reynolds el

flujo se vuelve turbulento y no siempre es posible resolver numéricamente todas las escalas relevantes, por consiguiente, son necesarios modelos para representar el comportamiento sub-malla, especialmente cerca de las paredes; (iii) a cualquier número de Mach y Reynolds la representación de geometrías complejas constituye un reto numérico ya que la conservación del segundo orden del método no siempre es posible.

Desde la formulación del método en la forma actualmente utilizada se han desarrollado diversas estrategias para la resolución de las dificultades que surgen en la incorporación de paredes en las simulaciones con métodos de lattice Boltzmann. Estas estrategias pueden clasificarse en dos grupos, según la perspectiva con la que se afronta el problema: mesoscópica o macroscópica. La aproximación mesoscópica está basada en la creación de reglas de choque entre las paredes y las pdf's que definen el estado del fluido. Por otra parte, la aproximación macroscópica (o hidrodinámica) se basa en la imposición de variables macroscópicas conocidas (eg. velocidad, presión o cantidad de movimiento) en las paredes. Esta última aproximación tiene el inconveniente de no ser unívoca, ya que es menor el número de variables macroscópicas conservadas (densidad y velocidad, en un fluido isoterma), que variables mesoscópicas que definen el flujo (9 pdf's en dos dimensiones).

En este contexto se ha desarrollado una condición de contorno para paredes que combina las dos aproximaciones. Se descomponen las pdf's que definen el flujo en series de Taylor entorno al número de Knudsen y se trata de forma mesoscópica la parte de equilibrio y de forma macroscópica la parte de no equilibrio. Por lo tanto, las variables en equilibrio cumplen el papel de conservación de la masa y adaptación a geometrías complejas, y la parte de no-equilibrio (que sí puede ser fijada unívocamente) es calculada a partir de un modelo de esfuerzos en la pared y reproduce el efecto de la misma en la ecuación de cantidad de movimiento. Se analizan las ventajas e inconvenientes que presenta esta aproximación frente a las ya existentes, y cómo puede contribuir a cada uno de los tres problemas descritos en el segundo párrafo.

---

## Sobre la propiedad de Kneser del sistema tri-dimensional de Navier-Stokes

José Valero  
 Universidad Miguel Hernández  
 Centro de Investigación Operativa  
 Avda. Universidad s/n  
 03202 - Elche (Alicante), España

E-MAIL: [jvalero@umh.es](mailto:jvalero@umh.es)

COLABORADORES: P.E. Kloeden (Johann Wolfgang Goethe-Universität)

El sistema tri-dimensional de Navier-Stokes ha sido investigado durante muchos años por muchos autores, quedando todavía muchas cuestiones abiertas por resolver. Por ejemplo, aunque hace tiempo es bien conocida la existencia de soluciones globales débiles, la unicidad del problema de Cauchy sigue siendo hoy día un problema abierto. Asimismo, estas soluciones son continuas con respecto a la topología débil del espacio de fases, pero tampoco se sabe si lo son con respecto a la topología fuerte. Debido a esta

falta de regularidad la existencia de un atractor global en la topología fuerte es también una cuestión abierta hasta la fecha.

Debido a la falta de unicidad del problema de Cauchy, para cada condición inicial debemos considerar un haz de soluciones débiles. Por tanto, para cada momento positivo del tiempo podemos estudiar las propiedades topológicas del conjunto de puntos alcanzados en ese instante por las soluciones. En particular, es interesante estudiar si este conjunto es conexo y compacto en alguna topología, lo que se conoce como la propiedad de Kneser.

En este trabajo consideramos la ecuación de Navier-Stokes tri-dimensional definida en un acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de frontera suave. Probamos que el conjunto de puntos alcanzados por las soluciones débiles (de cierto tipo) en cada momento positivo del tiempo satisface la propiedad de Kneser con respecto a la topología débil del espacio de fases

$H = cl_{(L^2(\Omega))^3} \mathcal{V}$ , donde  $\mathcal{V} = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \operatorname{div} u = 0\}$ .

Como herramienta auxiliar en la prueba de este resultado utilizamos un sistema modificado de Navier-Stokes introducido recientemente en [1].

Finalmente, usando esta propiedad, demostramos también que el atractor global (en sentido débil) del sistema tri-dimensional de Navier-Stokes es conexo con respecto a la topología débil de  $H$ .

## Bibliografía

- [1] T. Caraballo, E. Kloeden, J. Real, *Unique strong solution and V-attractors of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations*, *Advanced Nonlinear Studies* **6**, 411–436 (2006).
-

# PANELES



### Determinación del valor de los parámetros del sistema de Lorenz y aplicación al criptoanálisis de criptosistemas caóticos

A. B. Orue

G. Extensión Científica, IMAFF, CSIC.  
Serrano 113b, 28006 Madrid, España.  
Tel: +34-91 563 12 84

E-MAIL: ab.orue@alumnos.upm.es

WWW: <http://www.csic.es/proyectos/escuela/grupo.htm>

COLABORADORES: G. Alvarez, D. Arroyo, J. Nunez y F. Montoya

En este trabajo se describe un método nuevo, basado en el análisis de algunas propiedades geométricas del sistema caótico de Lorenz, para determinar con precisión sus parámetros a partir de la señal de sincronización que se utiliza para enclavar un sistema transmisor con otro receptor. Así como su aplicación al descifrado de comunicaciones seguras que utilizan una señal caótica como portadora de información cifrada.

El sistema de Lorenz [1] está definido por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_s = \sigma(y - x), \dot{y}_s = \rho x - y - xz, \dot{z} = xy - \beta z. \quad (1)$$

donde  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\beta$  son parámetros fijos.

Este sistema tiene tres puntos de equilibrio. Para  $0 < \rho < 1$  el origen es un punto de equilibrio globalmente estable; para  $1 \leq \rho < \rho_H$  el origen se convierte en un punto silla no-estable y da paso a otros dos puntos estables  $C^+$  y  $C^-$  señalados en la Fig. 1, de coordenadas:

$$C^\pm = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, (\rho - 1)), \quad (2)$$

en donde  $\rho_H$  es un valor crítico que corresponde a una bifurcación de Hopf [2] definido como:

$$\rho_H = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}. \quad (3)$$

La relación de los parámetros del sistema  $\rho$  y  $\beta$  y las coordenadas de los punto fijos  $C^+$  ó  $C^-$ , dadas por la Ec. (2) permiten un acercamiento a la determinación de los parámetros del sistema de Lorenz, basada en la estimación, de las coordenadas de los puntos de equilibrio a partir de la forma de onda de una o varias de las variables caóticas  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , que fuesen conocidas. Se presenta un método de determinación de  $C^+$  ó  $C^-$ , a partir de mediciones hechas sobre el atractor, como se indica en la Fig. 2 y que permite reducir primero el espacio de búsqueda de los parámetros y luego su determinación con la precisión deseada.

Este método puede utilizarse para romper sistemas de comunicación caóticos cifrados, que utilizan dos canales, uno utilizado para sincronizar los sistemas emisor y receptor y otro utilizado para enviar el mensaje cifrado, consistente en un enmascaramiento. Como ejemplo se aplica este procedimiento a la rotura de criptosistemas concretos basados en el sistema dinámico de Lorenz. En primer lugar al sistema propuesto por Wang y Bu [3], en el que se usa para sincronizar el sistema receptor la variable  $z(t)$  del transmisor, y en segundo lugar al sistema propuesto por Jiang [4], en el que la variable transmitida es la  $x(t)$ . Una vez determinados los parámetros desconocidos, se recupera el texto claro de la misma forma que lo haría el propietario legal de la clave.

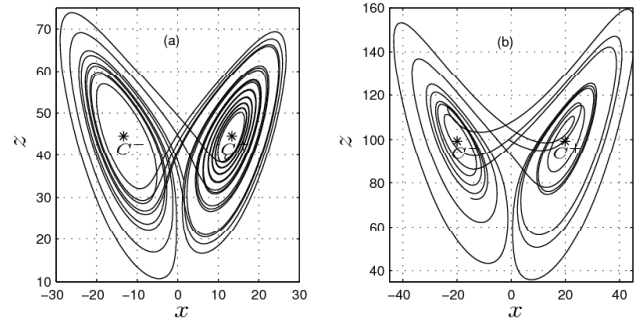


Fig. 1: Proyección sobre el plano  $x$ - $z$  del atractor de Lorenz: (a) parámetros:  $\rho = 45,6$ ,  $\sigma = 16$  and  $\beta = 4$ ; (b) parámetros  $\rho = 100,3$ ,  $\sigma = 16$  and  $\beta = 4$ . La posición de los puntos de equilibrio  $C^+$  y  $C^-$  está indicada por asteriscos.

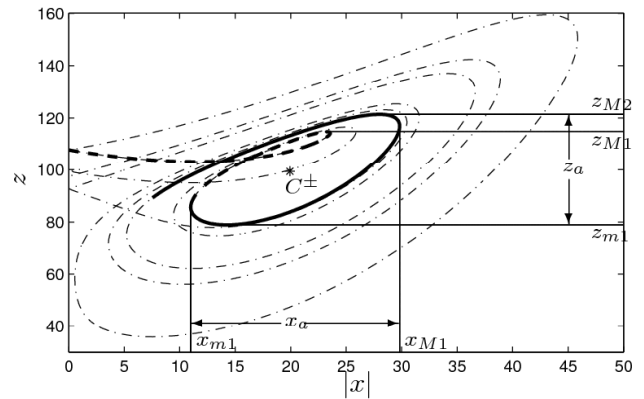


Fig. 2: Proyección sobre el plano  $x$ - $z$  del atractor de Lorenz: (a) parámetros:  $\rho = 45,6$ ,  $\sigma = 16$  and  $\beta = 4$ ; (b) parámetros  $\rho = 100,3$ ,  $\sigma = 16$  and  $\beta = 4$ . La posición de los puntos de equilibrio  $C^+$  y  $C^-$  está indicada por asteriscos.

### Bibliografía

- [1] Edward N. Lorenz. *Deterministic non periodic flow*, J. Atmos. Sci., **20** 130–141 (1963).
- [2] C. Sparrow. *The Lorenz equations*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag (1982).
- [3] Bing-Hong Wang and Shouliang Bu. *Controlling the ultimate state of projective synchronization in chaos: application to chaotic encryption*, Int. J. Mod. Phys. B, **18**, 2415–2421 (2004).
- [4] Z. P. Jiang, *A note on chaotic secure communication systems*, IEEE Trans. Circuits Syst. I-Fundam. Theor. Appl., **49**, 92–96 (2002).

## Ondas no lineales en medios atómicos coherentes

Adrian Alexandrescu

Departamento de Matemáticas  
e Instituto de Matemática Aplicada  
a la Ciencia y la Ingeniería  
E.T.S. Ingenieros Industriales  
Avda. de Camilo José Cela, 3  
Universidad de Castilla-La Mancha  
13071 Ciudad Real

E-MAIL: [adrian.alexandrescu@uclm.es](mailto:adrian.alexandrescu@uclm.es)

WWW: <http://matematicas.uclm.es/adrian>

COLABORADORES: Jose Ramon Salgueiro (Universidad de Vigo), Humberto Michinel (Universidad de Vigo), Víctor M. Pérez-García (Universidad de Castilla-La Mancha)

Los sistemas atómicos coherentes pueden presentar transparencia inducida electromagnéticamente (EIT) e índices de refracción no lineal gigantesco [1]. Este fenómeno ocurre cuando un medio atómico (normalmente un gas), que habitualmente es opaco a la radiación electromagnética (haz láser), se hace transparente por efecto de otro haz láser que altera la estructura de niveles atómicos del medio.

La propagación de los campos electromagnéticos por este tipo de medios no lineales viene dada por un sistema acoplado de dos ecuaciones no lineales de Schrödinger.

La idea de este trabajo es utilizar el hecho de que la respuesta no lineal del medio puede ser alterada mediante el control de ciertos parámetros del sistema, en particular las desintonías de los campos electromagnéticos con respecto a los niveles atómicos [2]. Este control puede dar lugar a la realización, con estos medios, de la *luz líquida* [2, 3]. También presentaremos algunas características de los estados ligados estacionarios de los campos electromagnéticos en un medio atómico coherente de cuatro niveles.

## Bibliografía

- [1] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, 1997).
- [2] H.A. Michinel, M.J. Paz-Alonso y V.M. Pérez-García, *Turning Light into a Liquid via Atomic Coherence*, Phys. Rev. Lett. **96**, 023903 (2006).
- [3] H. Michinel, J. Campo-Táboas, R. García-Fernández, J.R. Salgueiro y M.L. Quiroga-Teixeiro, *Liquid light condensates*, Phys. Rev. E **65**, 066604 (2002).

## Paredes de dominio en el sistema discreto de Ablowitz-Ladik con forzamiento paramétrico

Alberto Aparici

Departament d'Òptica  
Universitat de València  
Dr. Moliner 50  
46100 - Burjassot

COLABORADORES: Germán J. de Valcárcel (Universitat de València)

E-MAIL: [ygramul.el.multiple@gmail.com](mailto:ygramul.el.multiple@gmail.com)

Consideramos un sistema de Ablowitz-Ladik real en una dimensión [1], una discretización posible de la ecuación real de Ginzburg-Landau. El sistema admite, inicialmente, soluciones estacionarias homogéneas de fase arbitraria, pero si se lo fuerza paramétricamente esta simetría continua se rompe en favor de una discreta dando lugar a una situación biestable, pudiendo formarse dominios homogéneos separados por una fase  $\pi$ . La conexión en la frontera entre dominios de signo opuesto se presenta naturalmente en la forma de defectos topológicos (llamados en general "paredes") que pueden ser quirales (en cuyo caso son llamados "de Bloch") o no quirales ("de Ising") [2]. Estos defectos tienen, en el sistema de Ablowitz-Ladik, expresiones analíticas sencillas, y demostramos que sus regiones de estabilidad son disjuntas, por tanto paredes de Ising y de Bloch no coexisten. También presentamos un estudio numérico de estas estructuras en una extensión perturbativa del sistema más allá del límite de integrabilidad. Al igual que se ha observado en el caso continuo [3], constatamos que en el caso perturbado las paredes quirales cobran movimiento, mientras que las no quirales permanecen estáticas. Observamos también la presencia del potencial de Peierls-Nabarro, una barrera efectiva de potencial debida al carácter discreto del sistema [4] que afecta al movimiento de las estructuras. Finalmente, estudiamos la transición entre paredes de Ising y de Bloch en el caso perturbado y la comparamos con el sistema original.

## Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *A nonlinear difference scheme and inverse scattering*, Studies in Applied Mathematics **55**, 213-229 (1976).
- [2] G. J. de Valcárcel, I. Pérez-Arjona, E. Roldán, *Domain walls and Ising-Bloch transitions in parametrically driven systems*, Physical Review Letters **89**, 164101 (2002).
- [3] P. Couillet, J. Lega, B. Houchmanzadeh, J. Lajzerowicz, *Breaking chirality in nonequilibrium systems*, Physical Review Letters **65**, 1352-1355 (1990).
- [4] Y. S. Kivshar, D. K. Campbell, *Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes*, Physical Review E **48**, 3077-3081 (1993).



## Sincronización isócrona de circuitos caóticos acoplados con retardos.

Alexandre Wagemakers

*Grupo de Dinámica no lineal y teoría del caos,*

*Departamento de Física,*

*Universidad Rey Juan Carlos,*

*c/ Tulipán s/n,*

*28933 Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [alexandre.wagemakers@urjc.es](mailto:alexandre.wagemakers@urjc.es)

COLABORADORES: Javier M. Buldú, Miguel A.F. Sanjuán

Estudiamos la sincronización isócrona de sistemas caóticos acoplados bidireccionalmente. Primero estudiamos experimentalmente la sincronización de dos circuitos caóticos acoplados con retardos. Los dos sistemas se sincronizan con un cierto retardo debido al tiempo de transmisión de la información. En segundo lugar, estudiamos la sincronización cuando un tercer oscilador de misma naturaleza se coloca como intermedio entre los otros dos. Observamos que a pesar del retardo en la transmisión de la señal, los sistemas extremos se sincronizan de manera isócrona, es decir que tienen la misma dinámica en el mismo instante [1]. Enseñamos también como esta sincronización se conserva cuando el sistema caótico intermedio es diferente de los otros dos extremos.

## Bibliografía

- [1] I. Fischer, R. Vicente, J. M. Buldú, M. Peil, M.C. Torrent, C.R. Mirasso and Jordi García-Ojalvo, *Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying*, Phys. Rev. Lett. **97**, 123902 (2006).

---

### Forzamiento de redes genéticas sintéticas

Alexandre Wagemakers

*Departamento de Física*

*Universidad Rey Juan Carlos*

*C/ Tulipán s/n*

*28933 Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [alexandre.wagemakers@urjc.es](mailto:alexandre.wagemakers@urjc.es)

COLABORADORES: Javier M. Buldú, Miguel A.F. Sanjuán, Oscar de Luís y Antonio Coloma.

Los mecanismos de funcionamiento de las redes genéticas, que implican el establecimiento de interacciones entre genes y entre proteínas, es una cuestión central en la investigación genética actual que ofrece una gran complejidad. Una de las aproximaciones experimentales a este problema en los últimos años ha sido la creación de redes genéticas sintéticas [1], más sencillas que las que se encuentran en la naturaleza. Dichas redes se construyen dotadas de una dinámica propia concreta, pero también con la intención de que en un futuro puedan ser integradas en redes aún más complejas, de modo que puedan llegar a ejercer algún tipo de control o interacción con las redes genéticas naturales. En el presente trabajo estudiamos la dinámica de este tipo de redes, concretamente la red genética conocida

como “represilador”, descrito por Elowitz y Leibler [2] y estudiamos los efectos que el tiempo de retardo y el ruido puedan tener en la dinámica y sincronización de este tipo de osciladores. A continuación modificaremos el diseño del “represilador” capaz de ser controlado externamente. Se le modificará uno de sus plásmidos para colocarle otro que sea susceptible a las variaciones de temperatura. De esta manera mostraremos cómo es posible sincronizar una población de redes genéticas oscilantes mediante la aplicación de una señal externa común, en este caso térmica. Seguidamente estudiamos la respuesta del sistema frente distintas frecuencias y amplitudes de excitación, así como la estabilidad del mismo frente a perturbaciones de carácter estocástico. Finalmente identificamos el rango de parámetros para el cual el sistema muestra una sincronización robusta.

## Bibliografía

- [1] J. Hasty, D. McMillen, and J. J. Collins, *Engineered gene circuits*, Nature **420**, 224-230 (2002).
- [2] M. B. Elowitz, and S. Leibler, *A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators*, Nature **403**, 335-338 (2000).

---

### Caos para semigrupos de traslación compleja

Alfred Peris

*Departament de Matemàtica Aplicada*

*Universitat Politècnica de València*

*Camí Vera S/N*

*46021 València*

E-MAIL: [aperis@mat.upv.es](mailto:aperis@mat.upv.es)

WWW: <http://personales.upv.es/aperis/>

COLABORADORES: J. A. Conejero (València)

Los semigrupos de traslación  $\{T_t ; t \geq 0\}$ , dados por  $(T_t f)x := f(t+x)$ , definidos en ciertos espacios de funciones, aparecen de forma natural como dinámicamente conjugados con los semigrupos solución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales lineales.

Desde el trabajo de Lasota [3] se pudo observar estos semigrupos de solución podían presentar un comportamiento caótico. El artículo de Desch, Schappacher y Webb [2] supuso un estudio sistemático del comportamiento caótico de semigrupos de traslación.

Nosotros estudiamos los semigrupos de traslación cuando el semigrupo de índices es un sector (o todo) del plano complejo [1]. Establecemos que un semigrupo puede ser topológicamente transitivo (es decir, admite órbitas densas), sin serlo en ningún rayo que parta del vértice del sector. Establecemos caracterizaciones para transitividad de dichos semigrupos de traslación, en términos de los pesos del espacio de funciones. También caracterizamos el caos en sentido Devaney (transitividad y densidad de puntos periódicos).

## Bibliografía

- [1] J. A. Conejero and A. Peris, *Chaotic translation semigroups*, Discrete Cont. Dynam. Syst. A (to appear).
- [2] W. Desch, W. Schappacher, and G. F. Webb, *Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators* Ergodic Theory Dynam. Systems, **17**, 793–819, (1997).
- [3] A. Lasota, *Invariant measures and a linear model of turbulence*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **61**, 39–48 (1979).

---

### A new solution family of the Jacobi PDEs and its global investigation

Benito Hernández-Bermejo  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*C/Tulipán S/N*  
*28933 - Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [benito.hernandez@urjc.es](mailto:benito.hernandez@urjc.es)  
 WWW: <http://www.escet.urjc.es/~matemati/benito/benito.html>

Poisson systems constitute one natural generalization of Hamiltonian systems, that comprise a great variety of models not included in the traditional Hamiltonian framework. One basic aspect in the construction of Poisson systems deals with the need of finding a suitable solution of a set of coupled nonlinear partial differential equations, known as Jacobi identities. In this communication, a new family of solutions of the Jacobi partial differential equations for finite-dimensional Poisson systems is characterized and completely analyzed. Such family has some remarkable properties. In first place, it is defined for arbitrary values of the dimension and the rank. In second term, it is described in terms of arbitrary differentiable functions, namely it is not limited to a given degree of nonlinearity. Additionally, it is possible to determine explicitly the fundamental properties of those solutions, such as their Casimir invariants and the algorithm for the reduction to the Darboux canonical form, which have been reported only for a very limited sample of finite-dimensional Poisson structures. Moreover, such analysis is carried out globally in phase space, thus improving the usual (local) scope of Darboux theorem. We conclude with some examples of applied interest from different domains of nonlinear science, including mathematical biology and mechanical systems.

## Bibliografía

- [1] B. Hernández-Bermejo, *New solution family of the Jacobi equations: Characterization, invariants and global Darboux analysis*, J. Math. Phys. **48** 2 (2007).

## Cálculo fraccionario y tráfico de Internet

Carlos Aguirre  
*Dpto. de Ingeniería Informática*  
*Escuela Politécnica Superior*  
*Universidad Autónoma de Madrid*  
*28049 - Madrid*

E-MAIL: [carlos.aguirre@uam.es](mailto:carlos.aguirre@uam.es)  
 WWW: <http://www.eps.uam.es/~aguirre>

COLABORADORES: Pedro Pascual (Universidad Autónoma de Madrid), Doris Campos (Universidad Autónoma de Madrid), Luis Vázquez (Universidad Complutense).

Las redes de tipo *Small-World*, con transmisión imperfecta de información, se han propuesto para modelar el tráfico por Internet. [1, 2]. En estos modelos, el parámetro bajo estudio es el número total de nodos afectados en el tiempo  $t$ ,  $V(t)$ . El modelo debe tener en cuenta características importantes como el retraso en la transmisión, la pérdida de paquetes y la aparición de congestión en los nodos. En las redes de comunicaciones modernas, no sólo es interesante saber cuán rápido viajan los paquetes a través de la red, sino también cuántos paquetes existen en cada uno de los nodos en un instante  $t$ . Para una determinada densidad de probabilidad  $f$  para la transmisión de un paquete del nodo  $x$  al nodo  $y$ , el número de paquetes en el nodo  $x$  en el instante  $t$ ,  $n(x, t)$ , puede ser estimado haciendo uso del cálculo fraccionario [3]. Así, podemos estudiar la dinámica del tráfico en Internet cuando se consideran retrasos y pérdida de paquetes si modelizamos esta dinámica con un proceso con dependencia de largo alcance mediante el uso del cálculo fraccionario. Esta contribución presenta simulaciones por ordenador del tráfico por internet y compara los resultados con los obtenidos de los modelos que hacen uso del cálculo fraccionario.

## Bibliografía

- [1] Yang, *Chaos in small-world networks*, Phys. Rev. E, **63**, 462061 (2001).
- [2] C. Aguirre, P. Pascual, D. Campos and L. Vázquez, *Chaotic behavior of small-world communication networks with imperfect transmission*, The 10th IFAC/IFORS/IMACS/IFIP/Symposium on Large Scale Systems, Osaka, Japan (2004).
- [3] V.Zaborovski, Y.Podgurski and S.Yegorov, *New traffic model on the base of fractional calculus*, <http://www.neva.ru/conf/art/art8.html>

## Análisis de un esquema tipo Newton de alto orden

Concha Bermúdez

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
 Universidad Politécnica de Cartagena  
 Paseo Alfonso XIII, 52  
 30203 Cartagena (Murcia)

E-MAIL: [concepcion@bermudez.es](mailto:concepcion@bermudez.es)

WWW: <http://www.demae.upct.es>

COLABORADORES: Sergio Amat (Universidad Politécnica de Cartagena), Sonia Busquier (Universidad Politécnica de Cartagena) y Sergio Plaza (Universidad de Santiago de Chile)

Uno de los problemas clásicos en Matemáticas es la resolución de ecuaciones no lineales. En este trabajo estudiaremos métodos iterativos para aproximar las soluciones de estas ecuaciones.

Al estudiar un método iterativo, uno de los aspectos más importante a considerar es la convergencia (orden del mismo). Para dicho análisis, en ocasiones, es suficiente conocer un intervalo  $[a, b]$  que contenga a la raíz, más ciertas hipótesis de regularidad, este tipo de convergencia se conoce como convergencia global. Otros resultados ("tipo Kantarovich"), establecen condiciones suficientes en el operador y en la primera aproximación a la solución (pivote) para asegurar que la sucesión generada por el esquema converja a una solución de la ecuación, dando lugar a los llamados teoremas semilocales de convergencia. Por último, en los llamados teoremas locales de convergencia, se imponen las hipótesis sobre la raíz buscada.

Por otro lado el coste computacional es la otra característica a estudiar.

En este trabajo, presentamos un método de tres pasos y de cuarto orden que tiene un coste computacional muy aceptable. Esto es debido a que no necesita segundas derivadas [1] y que la matriz de los sistemas lineales asociados es la misma en los tres pasos de cada iteración. Se estudiará su convergencia e implementación.

## Bibliografía

- [1] S. Amat, S. Busquier and J. M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math. **157**, 197–205 (2003).
- [2] M. A. Noor and K. I. Noor, *Some iterative schemes for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183** 774-779 (2006).

## Sincronización de láseres de semiconductor en anillo

Cristina Martínez González

Departament de Física i Enginyeria Nuclear.  
 Universitat Politècnica de Catalunya, C/ Colom 11,  
 08222 Terrassa

E-MAIL: [cristinamartinezg@gmail.com](mailto:cristinamartinezg@gmail.com)

COLABORADORES: Javier Martín Buldú, M. Carmen Torrent, Jordi García-Ojalvo

Los láseres de semiconductor han sido objeto de estudio por su potencial uso en comunicaciones caóticas [1]. Debido a su dinámica rápida se han utilizado para transmitir información encriptada en el rango de los GHz [2]. Recientemente se ha demostrado su robustez para transmitir mensajes de alta frecuencia en condiciones reales [3]. Para conseguir una dinámica caótica en un láser de semiconductor se deben aumentar sus grados de libertad (que en el caso de un láser aislado es igual a 2: el campo eléctrico y la inversión de población), lo que se puede conseguir mediante el uso de cavidades externas. Tanto con feedback óptico como con inyección de otro láser (caótico en el caso de acoplamiento unidireccional [4] y estable para acoplamiento mutuo [5]) se consigue que el láser emita en un régimen caótico. En el presente trabajo proponemos una configuración en anillo para inducir una dinámica caótica en una serie de láseres de semiconductor acoplados. Debido a que tenemos un anillo cerrado cualquier perturbación que se introduzca en uno de los láseres permanecerá dentro del anillo. La realimentación de una perturbación, más la interacción con las oscilaciones de relajación, excitadas durante el viaje de ida y vuelta, desestabiliza los láseres transcurrido un cierto número de vueltas, provocando una dinámica caótica en todos los láseres del anillo. Dichos láseres muestran unas caídas en sus intensidades a tiempos irregulares, que se corresponden con la envolvente de una dinámica real más rápida (de ahí que se conozcan como oscilaciones de baja frecuencia o LFF). Cada uno muestra una serie temporal sincronizada con los demás pero desplazada un tiempo  $\tau_c$  equivalente al tiempo de acoplamiento y como consecuencia se puede definir un líder (o inductor) al que siguen el resto de láseres. Sin embargo, en esta configuración se hace imposible el envío de mensajes entre láseres debido a continuas alternancias en el rol de líder, lo que lleva a la pérdida momentánea de la sincronización. En ese sentido observamos un comportamiento muy parecido al de dos láseres acoplados bidireccionalmente.

Otra configuración que hemos estudiado es una arquitectura en anillo pero con un acoplamiento bidireccional. En este caso las intensidades de salida de los láseres están sincronizadas tanto en la dinámica lenta (envolvente) como en la rápida, pero además ocurre de manera isócrona, es decir, sin retraso entre las series temporales. Este fenómeno conocido como sincronización a tiempo cero (*zero-lag synchronization*), ha sido recientemente observado en láseres en una configuración lineal [6]. Finalmente, hemos introducido un mensaje en la corriente de bombeo de uno de los láseres, pudiendo recuperarlo con éxito en el tercero. Aprovechando la capacidad de filtrado de los sistemas caóticos sincronizados, restamos la intensidad del láser que portador

del mensaje (transmisor) de la del laser receptor, recuperando de esta manera el mensaje.

Una vez estudiados numéricamente estos dos casos realizamos el montaje experimental, obteniendo la salida isócrona para los tres láseres.

## Bibliografía

- [1] A. Uchida, F. Rogister, J. García-Ojalvo and R. Roy. *Synchronization and communication with chaotic laser systems*, Progress in Optics **48**, 203-341 (2005).
- [2] A. Sánchez-Díaz, C.R. Mirasso, P. Colet and P. García-Fernández. *Encoded Gbits/s digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers*, IEEE J. Quantum Electron **35**, 292-297 (1999).
- [3] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Anovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C.R. Mirasso, L. Pesquera, and K. A. Shore. *Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links*, Nature **438**, 343 (2005).
- [4] R. Vicente, T. Pérez, and C.R. Mirasso. *Open-versus closed-loop performance of synchronized chaotic external-cavity semiconductor lasers*, IEEE J. Quantum Electron. **38**, 1197 (2002).
- [5] T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer, J. Mulet, and C.R. Mirasso. *Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers*, Phys. Rev. Lett. **86**, 795 (2001).
- [6] I. Fischer, R. Vicente, J. M. Buldú, M. Peil, M. C. Torrent, C.R. Mirasso, and J. García-Ojalvo. *Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying*, Phys. Rev. Lett. **97**, 123902 (2006).

---

### Study of heart disfunction through statistical analysis of heart rate variability

Enric Alvarez-Lacalle

*Departament de Física Aplicada  
Universitat Politècnica de Catalunya  
08028 - Barcelona*

E-MAIL: [enrical@fa.upc.edu](mailto:enrical@fa.upc.edu)

WWW: <http://www-fa.upc.es/websfa/eupb>

COLABORADORES: Blas Echebarria (Universitat Politècnica de Catalunya), Jean Bragard (Universidad de Navarra).

Clinical studies have shown that heart rate variability is a good predictor of mortality in patients suffering of several heart diseases. In a healthy heart the influence of the sympathetic and parasympathetic nervous system, physical activity, body position, sleep cycles, and even temperature, results in variations of interbeat (RR) intervals, at time scales ranging from less than a second to 24 hours. Thus, a characteristic of a normal healthy RR signal is its rich variability. At the other end of the scale, it is well known that a perfectly periodic heart rate is pathological. Based on this relation between the richness of the ECG

signal and heart function, several measurements of complexity have been proposed as markers of the degree of heart failure and mortality. Using long time series of RR intervals from two groups of subjects (normal and suffering congestive heart failure) obtained from the the Physionet database ([www.physionet.org](http://www.physionet.org)), we compare three different sets of indicators of heart rate complexity. Firstly, those related with Fourier analysis and cross-correlations. Secondly, typical nonlinear measures, common in statistical physics, related with the dimensionality of the associated attractor (embedding dimension, fractal dimension, exponent of a detrended fluctuation analysis). And finally those related with information theory and symbolic dynamics.

---

### Design of a cellular biosensor of vanillin through synthetic biology (iGEM 2006 Valencia project)

Emilio Navarro

*Universidad Politècnica de Valencia.  
Departamento de Matemática Aplicada.  
Camino de Vera s/n.  
46022 - Valencia, España.*

E-MAIL: [enavarro@fis.upv.es](mailto:enavarro@fis.upv.es)

WWW: <http://www.intertech.upv.es>

COLABORADORES: M. Báguena, J. Carrera, C. Edo, P. Fernández-de-Córdoba, G. Rodrigo, J. Urchueguia (Universidad Politècnica de Valencia), A. Aparici, M. C. Aroca, G. Fuertes, A. Ferrando, D. Gimenez, C. Mata, J. V. Medrano, A. Montagud, C. Navarrete, J. Salgado (Universidad de Valencia), A. Jaramillo, P. Tortosa (École Polytechnique, Francia)

The main objective of this project consist on designing a cellular biosensor. We use as a chasis an *EnvZ<sup>-</sup>E.coli* strain to construct two different devices, a sensor and an actuator, assembled using OmpR-P as a standardized mediator. The sensor device contains a computationally designed vanillin receptor protein and a synthetic two component signal transducer system (Trz-OmpR). The device has been inspired on Hellinga's work [1], sensing TNT and other molecules by using a mutated periplasmic binding protein (PBP). This receptor protein was based on a ribose-binding protein as scaffold. The TRZ was built by fusion of the periplasmic and transmembrane domains of a Trg protein with an EnvZ kinase domain [2]. When the receptor complex binds Trg domain, an allosteric motion is propagated to the cytoplasmic EnvZ kinase domain, resulting in autophosphorylation and subsequent phosphate transfer to the OmpR transcription factor, which finally induces transcription of the ompC promoter.

As actuator, inspired on Weiss's work on pattern generation [3], we used a synthetic transcriptional circuit of genes, which implements an OmpR-P band detector having GFP and RFP as outputs. We designed this circuit by using a synthetic promoter working as an AND gate [4], which is synergistically activated by cI and CRP. The constructed Trg-EnvZ fusion and AND promoter will be very useful for future synthetic biology projects.

## Bibliografía

- [1] L.L. Looger, M.A. Dwyer, J. Smith, H.W. Hellinga, *Computational design of receptor and sensor proteins with novel functions*, Nature **423**, 185–190 (2003).
- [2] J.W. Baumgartner, C. Kim, R.E. Brissette, M. Inouye, C. Park, G.L. Hazelbauer, *Transmembrane signalling by a hybrid protein: Communication from the domain of chemoreceptor Trg that recognizes sugar-binding proteins to the kinase/phosphatase domain of osmosensors EnvZ*, Journal of Bacteriology **176**, 1157–1163 (1994).
- [3] S. Basu, Y. Gerchman, C.H. Collins, F.H. Arnold, R. Weiss, *A synthetic multicellular system for programmed pattern formation*, Nature **434**, 1130–1134 (2005).
- [4] J.K. Joung, D.M. Koepp, A. Hochschild, *Synergistic activation of transcription by bacteriophage lambda cI protein and E. coli cAMP receptor protein*, Science **265**, 1863–1866 (1994).

### Aplicación de una clase de extrapolaciones no lineales a sistemas de ecuaciones diferenciales

Fernando Manzano

*Dpto. Matemática Aplicada y Estadística  
U.P. Cartagena  
Paseo Alfonso XIII, 52  
30203 Cartagena (Murcia)*

E-MAIL: [sergio.amat@upct.es](mailto:sergio.amat@upct.es)

WWW: <http://www.demae.upct.es>

COLABORADORES: Sergio Amat

Al estudiar un problema desde un punto de vista numérico se persiguen ciertos objetivos como pueden ser: convergencia, estabilidad, precisión, etc. En muchas ocasiones, para poder lograr estos objetivos, se necesitan discretizaciones con gran cantidad de nodos que hacen disminuir la eficiencia de los métodos.

Así, sería interesante obtener alternativas que evitasen posibles problemas como: excesivo coste computacional o aumento de los errores de redondeo. Un caso particular son las técnicas de extrapolación, que mediante varias aplicaciones del método son capaces que aumentar el orden del mismo y en ciertas ocasiones sus regiones de estabilidad.

En este trabajo analizamos para sistemas de ecuaciones una técnica de extrapolación que fue introducida para problemas escalares en [1]. Los ejemplos numéricos para sistemas indican que resulta ser una buena alternativa a las extrapolaciones lineales (Richardson) que son las más utilizadas.

## Bibliografía

- [1] S. Amat, S. Busquier and V. Candela, *Reciprocal Polynomial extrapolation*, J. of Comput. Math., **22**, 1-10 (2004).

### Evidencia experimental de patrones transversales hiperbólicos en un resonador óptico no lineal

F. Silva

*Departamento de Optica  
Universitat de València  
Dr. Moliner, 50  
46100 - Burjassot, Spain*

E-MAIL: [fernando.silva@uv.es](mailto:fernando.silva@uv.es)

COLABORADORES: A. Esteban-Martín (Institut de Ciències Fotòniques), J. García-Monreal, J. C. Soriano y G.J. de Valcárcel (Universitat de València) and K. Staliunas (ICREA, Universitat Politècnica de Catalunya)

Los sistemas formadores de patrones se rigen por ecuaciones diferenciales parciales con simetría elíptica, por eso la componente espacial está representada por un operador laplaciano. Este es el caso de los resonadores ópticos planos, donde el operador laplaciano corresponde a la difracción. Puede cambiar la situación a un caso hiperbólico, representado por un operador de D'Alambert, que requiere, en el caso difractivo, que los signos sean contrarios en dos direcciones transversales ortogonales [1]. En nuestro experimento utilizamos un resonador óptico en autoimagen, responsable de los efectos difractivos, que permite un gran control de la longitud efectiva de la cavidad [2]. En combinación al mismo, el uso de lentes cilíndricas en determinadas posiciones permite diferentes longitudes de la cavidad en dimensiones transversales ortogonales, produciendo coeficientes de difracción positivos en una dirección y negativos en otra. En este trabajo se pretende mostrar (i) como se pueden manipular las propiedades de difracción en dos direcciones transversales perpendiculares y (ii) la aparición de patrones hiperbólicos no lineales en un oscilador fotorrefractivo (PRO).

## Bibliografía

- [1] K. Staliunas y M. Tlidi, *Hyperbolic transverse patterns in nonlinear resonators*, Phys. Rev. Lett. **94**, 133902 (2005).
- [2] A. Esteban-Martín, J. García, E. Roldán, V. B. Tarasenko, G. J. de Valcárcel y C. O. Weiss, *Experimental approach to transverse wave-number selection in cavity nonlinear optics* Phys. Rev. A, **69**, 033816 (2004).

## Técnicas computacionales aplicadas al estudio de la cinética de oxidación de hexacianoferrato(III) por ácido peroxinitroso

Gema María Rodado

Universidad de Castilla-La Mancha

Facultad de Ciencias Químicas,

Departamento de Matemáticas

Avda. Camilo José Cela, 3

13071 - Ciudad Real

E-MAIL: gemamaria.rodado@uclm.es

WWW: <http://matematicas.uclm.es/qui-cr>

COLABORADORES: Henar Herrero, Antonio Mucientes

En este trabajo se propone un mecanismo cinético para la reacción de oxidación descrita en el título. En dicho mecanismo aparece una serie de constantes cinéticas cuyo valor se quiere ajustar teniendo en cuenta los datos experimentales de la concentración de uno de los productos de la reacción (hexacianoferrato(III)) en función del tiempo. Para ello, en primer lugar, se modela el mecanismo cinético de la reacción mediante un sistema de EDOs:

$$\begin{aligned}x_1' &= 2(Hx_2F) + 2k_4x_3 \\x_2' &= -k_1x_2 + k_2x_3 - Hx_2F \\x_3' &= k_1x_2 - (k_2 + k_3 + k_4)x_3\end{aligned}$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  son las concentraciones de los diferentes compuestos que intervienen en la reacción,  $H$  y  $F$  son valores constantes conocidos y  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  son las constantes cinéticas cuyo valor se quiere ajustar. Estas ecuaciones se resolverán de forma numérica utilizando la subrutina de MATLAB `ode15s`.

En segundo lugar, se plantea la siguiente función:

$$F(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{i=1}^n (X(t_i) - x_1(t_i, k_1, k_2, k_3, k_4))^2$$

donde  $X$  corresponde a los valores experimentales de la concentración de hexacianoferrato(III) y que ha sido denominada como  $x_1$  en el sistema de EDOs, y  $x_1$  es la solución numérica del sistema de EDOs. A continuación, se halla de forma numérica un mínimo de esta función de 4 variables utilizando el algoritmo de Levenberg-Marquardt de la función de MATLAB `lsqcurvefit`.

De todo el estudio se concluye que las constantes cinéticas obtenidas están de acuerdo con las descritas en la bibliografía, las cuáles fueron halladas utilizando métodos de integración, y por tanto que el mecanismo propuesto para la cinética de la reacción es correcto.

## Bibliografía

- [1] A. E. Mucientes, H. Herrero and O. Sánchez. *Legendre Ru(VI)-Catalyzed Oxidation of Alcohols by Hexacyanoferrate(III). Computational analysis of mixed kinetic order*, Int. J. Chem. Kinet. **38**, 153–158 (2005).
- [2] E. Martínez, A.E. Mucientes, F.J. Pobleto and A. Rodríguez. *Oxidation of Hexacyanoferrate(II) by Peroxynitrite. A mechanistic and kinetic study.*, Polish J. Chem. **78**, 261–271 (2004).

- [3] O. Gerasimov and S. V. Lyman. *The Yield of Hydroxyl Radical from the Decomposition of Peroxynitrous Acid.*, Inorg. Chem. **38**, 4317–4321 (1999).
- [4] D. Marquardt. *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters.*, SIAM J. Appl. Math. **11**, 431–441 (1963).
- [5] K. Levenberg. *A method for the solution of certain problems in least squares.*, Quarterly Appl. Math. **2**, 164–168 (1944).
- [6] L. F. Shampine and M. W. Reichelt. *The MATLAB ODE suite.*, SIAM J. Sci. Comput. **18**, 1–22 (1997).

---

## Sincronización en sistemas con bifurcaciones en presencia de simetría

Gerard Vidal Cassanya

Dept. Física y Matemática Aplicada

Instituto de Física

Universidad de Navarra

31080 - Pamplona, España

E-MAIL:

[gvidal@alumni.unav.es](mailto:gvidal@alumni.unav.es),

[hmancini@fisica.unav.es](mailto:hmancini@fisica.unav.es)

WWW: <http://www.unav.es>

COLABORADORES: Héctor L. Mancini (Universidad de Navarra)

La bifurcación de Takens-Bogdanov permite modelar un gran número de procesos dinámicos presentes en la naturaleza. Su aplicación para modelar experimentos termoconvectivos se ha comprobado en celdas cuadradas con pequeña relación de aspecto, tanto en grupos de simetría  $\mathbb{Z}_2$  como  $\mathbb{D}_4$  [1, 2, 3].

En este trabajo se describen en primer lugar las dinámicas que aparecen en función de los distintos parámetros del sistema de ecuaciones con simetría  $\mathbb{D}_4$ . Luego se analiza el espacio de parámetros con el objeto de identificar, si es posible, aquellos que permitirían sincronizar dos experimentos idénticos.

## Bibliografía

- [1] R. Hoyle, *Pattern Formation, An introduction to methods*, Cambridge (2006).
  - [2] T. Ondarçuhu, G. B. Midlin, H. L. Mancini, C. Pérez-García, *Dynamical Patterns in Bénard-Marangoni Convection in a Square Container*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3892–3895 (1993).
  - [3] G. B. Midlin, T. Ondarçuhu, H. L. Mancini, C. Pérez-García, A. Garcimartín, *Comparison of Data from Bénard-Marangoni Convection in a Square Container with a Model Based on Symmetry Argument*, Int. J. Bifurcation and Chaos, **4**, 1121–1133 (1994).
-

**Algoritmo para el cálculo de los argumentos externos de los nodos de un shrub en el conjunto de Mandelbrot**

G. Pastor

*Instituto de Física Aplicada, CSIC  
Serrano 144, 28006 Madrid*

E-MAIL: gerardo@iec.csic.es

WWW: <http://www.iec.csic.es>

COLABORADORES: M. Romera, G. Alvarez, J. Nunez, D. Arroyo, A. B. Orue y F. Montoya

Los puntos de Misiurewicz [1] son elementos constituyentes esenciales el conjunto de Mandelbrot. Los argumentos externos [2] son la herramienta más útil para el análisis de estos elementos; por lo tanto, es importante profundizar en el estudio del cálculo de sus argumentos externos. En esta comunicación presentamos un algoritmo para el cálculo de los argumentos externos de los puntos de ramificación, o nodos, de un shrub [3], ya que dichos nodos son los puntos de Misiurewicz más destacados de la zona caótica del conjunto de Mandelbrot.

**Herramientas utilizadas en el cálculo**

Sean  $(.a_1, .a_2)$  los argumentos externos de un componente hiperbólico, y sean  $(.b_1, .b_2)$  los argumentos externos de otro componente hiperbólico que está relacionado con el primero, como luego veremos. Los argumentos externos del pseudoharmónico de orden  $i$  de  $(.a_1, .a_2)$  y  $(.b_1, .b_2)$  son:

$$PH^{(i)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = \left( \overbrace{.a_1 b_2 b_2 \dots b_2}_i, \overbrace{.a_2 b_1 b_1 \dots b_1}_i \right). \quad (1)$$

Cuando  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  la Ec. (1) calcula una sucesión de componentes hiperbólicos situados en lo que denominamos zona de descendencia de  $(.a_1, .a_2)$  y  $(.b_1, .b_2)$ . Cuando  $i \rightarrow \infty$ , la Ec. (1) se convierte en:

$$PH^{(\infty)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = \left( \overbrace{.a_1 b_2 b_2 \dots b_2}_\infty, \overbrace{.a_2 b_1 b_1 \dots b_1}_\infty \right) = (.a_1 \overline{b_2}, .a_2 \overline{b_1}) \quad (2)$$

La Ec. (2) calcula un par de argumentos externos de un punto de Misiurewicz.

Los argumentos externos del pseudoantiharmónico de orden  $i$  de  $(.a_1, .a_2)$  y  $(.b_1, .b_2)$  son:

$$PA^{(i)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = \left( \overbrace{.a_1 b_1 b_1 \dots b_1}_i, \overbrace{.a_2 b_2 b_2 \dots b_2}_i \right). \quad (3)$$

Cuando  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , la Ec. (3) calcula una sucesión de componentes hiperbólicos. Cuando  $i \rightarrow \infty$ , la Ec.

(3) se convierte en:

$$PA^{(\infty)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = \left( \overbrace{.a_1 b_1 b_1 \dots b_1}_\infty, \overbrace{.a_2 b_2 b_2 \dots b_2}_\infty \right) = (.a_1 \overline{b_1}, .a_2 \overline{b_2}) \quad (4)$$

La Ec. (4) calcula un par de argumentos externos de un punto de Misiurewicz.

**Algoritmo para el cálculo de los argumentos externos de los nodos de la zona caótica**

Vamos a dar un algoritmo para calcular todos los argumentos externos de cualquier nodo del shrub o zona caótica, y con un único proceso de cálculo.

*Algoritmo:*

1. Sea  $(.b_1, .b_2)$  el primer componente hiperbólico de la ruta ancestral [4] que hay después del generador de la banda caótica.
2. Se determinan la rama de acceso (la que tiene  $m$  dígitos) y las ramas de salida (las que tienen  $m + 1$  dígitos) del nodo a calcular[5, 6].
3. Sean  $(.a_1, .a_2)$  los representantes de estas ramas.
4. Cuando  $(.a_1, .a_2)$  son los argumentos externos del representante de la rama de acceso,  $PH^{(\infty)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = (.a_1 \overline{b_2}, .a_2 \overline{b_1})$  son el primer y último argumento externo del nodo, que son los dos argumentos externos más próximos a los de  $(.a_1, .a_2)$ .
5. Cuando  $(.a_1, .a_2)$  son los argumentos externos del representante de una rama de salida,  $PA^{(\infty)}[(.a_1, .a_2); (.b_1, .b_2)] = (.a_1 \overline{b_1}, .a_2 \overline{b_2})$  son los dos argumentos externos del nodo que están más próximos a los de  $(.a_1, .a_2)$ .

**Bibliografía**

- [1] M. Misiurewicz y N. Nitecki, *Combinatorial patterns for maps of the interval*, Mem. Am. Math. Soc. 94 (1991) 1-110.
- [2] A. Douady y J.H. Hubbard, *Itération des polynômes quadratiques complexes*, Comptes Rendus des Séances de L'Académie des Sciences Paris Série I **294** (1982) 123-126.
- [3] G. Pastor, M. Romera, G. Alvarez y F. Montoya, *Shrubs in the Mandelbrot set ordering*, Int. J. Bifurcat. Chaos **13** (2003) 2279-2300.
- [4] M. Romera, G. Pastor, G. Alvarez y F. Montoya, *Heredity in one-dimensional quadratic maps*, Physical Review E **58** (1998) 7214-7218.
- [5] G. Pastor, M. Romera, G. Alvarez y F. Montoya, *Operating with external arguments in the Mandelbrot set antenna*, Physica D **171** (2002) 52-71.
- [6] G. Pastor, M. Romera, G. Alvarez y F. Montoya, *External arguments for the chaotic bands calculation in the Mandelbrot set*, Physica A **353** (2005) 145-158.

## Forzamiento y control de redes complejas

Irene Sendiña Nadal

*Departamento de Física*

*Universidad Rey Juan Carlos (URJC)*

*C/ Tulián s/n 28933 Móstoles*

E-MAIL: [irene.sendina@urjc.es](mailto:irene.sendina@urjc.es)

WWW: [www.escet.urjc.es/~fisica](http://www.escet.urjc.es/~fisica)

COLABORADORES: Javier M. Buldú (URJC), Inmaculada Leyva (URJC), Stefano Boccaletti (Weizmann Institute of Science)

Las redes complejas constituyen una buena herramienta a la hora de estudiar fenómenos de comportamiento colectivo en muchos sistemas sociales, tecnológicos o biológicos [1]. Este enfoque considera la relación entre la topología de las conexiones y la dinámica de los nodos o unidades acopladas. La mayoría de las redes reales analizadas presentan propiedades similares [2]: Distribuciones de grado y de agrupamiento sin escala, comportamiento tipo *small-world*, correlaciones entre nodos en función del grado, etc. Para explicar la estructura topológica que emerge en estos sistemas, se han propuesto varios procesos de crecimiento de redes basados en criterios simplemente topológicos, ya sean de tipo jerárquico como el *preferential attachment* [2], (según el cuál cuánto más conectado esté un nodo más probabilidad tiene de que se le unan más), o de tipo no jerárquico [4].

En el presente trabajo estudiaremos el crecimiento de redes complejas cuyas unidades fundamentales tienen una dinámica que varía en el tiempo. El objetivo del trabajo es imponer un determinado comportamiento colectivo mediante la inserción de nuevos nodos en la red. Para ello partiremos de una red de mapas logísticos conectados en diferentes configuraciones (regular, random, scale-free, etc...). A continuación, añadiremos nuevos nodos siguiendo criterios de tipo topológico y dinámico, es decir, conectando los nuevos mapas con aquellos que cumplan una determinada relación respecto al nuevo mapa a añadir. Veremos cómo no sólo la topología, sino también el tipo de acoplamiento de los nuevos nodos, afectan al estado final de la red.

El objetivo final será ver cómo este tipo de crecimiento tiene consecuencias tanto en las propiedades topológicas de la red como en la dinámica de sincronización.

## Bibliografía

- [1] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**, 175–308 (2006).
- [2] M.E.J. Newman, *The structure and function of complex networks*, SIAM Review **45**, 167–256 (2003).
- [3] A.-L. Barabási and R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286**, 509–512 (1999).
- [4] D.J. Watts and S.H. Strogatz, *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature **393**, 440–442 (1998).

## Ejemplos realistas de la existencia de campos magnéticos caóticos creados por líneas de corriente

Jacobo Aguirre Araujo

*Centro de Astrobiología (CSIC-INTA)*

*Ctra. de Ajalvir km. 4,*

*28850 Torrejón de Ardoz, Madrid*

E-MAIL: [aguirrea@inta.es](mailto:aguirrea@inta.es)

WWW: <http://www.cab.inta.es>

COLABORADORES: Daniel Peralta-Salas (Universidad Carlos III de Madrid)

En este trabajo nos centramos en una clase de campos vectoriales que son especialmente importantes en Física y sus aplicaciones: los campos magnéticos creados por configuraciones muy simples de cables de corriente continua [1]. Un enfoque muy fructífero, que se remonta a Faraday, es el que aporta la teoría de sistemas dinámicos, es decir, visualizar el campo magnético  $B$  como un campo de vectores en  $\mathbb{R}^3$ , donde las órbitas de  $B$  son llamadas líneas magnéticas. Estos campos aparecen frecuentemente en investigación multidisciplinar, como por ejemplo ingeniería biomédica (en particular resonancia magnética [2]), o ingeniería eléctrica (en particular corriente continua de alto voltaje en cables submarinos [3]).

Las líneas de campo magnético pueden ser simples o muy complicadas, dependiendo de la fuente que las provoque. De hecho, órbitas magnéticas caóticas se conocen desde hace tiempo en varios campos de la Física, pero siempre en sistemas de gran complejidad (como los Tokamaks en Física de plasmas [4] o los campos magnéticos en atmósferas estelares [5]).

En este trabajo mostramos los primeros ejemplos de campos magnéticos creados por configuraciones simples de líneas de corriente continua que exhiben las características básicas de caos hamiltoniano, es decir, islas KAM rodeadas de regiones caóticas [6, 7]. En particular, aplicando a nuestro problema el teorema de Poincaré-Birkhoff y la teoría KAM, probamos rigurosamente la falsedad de la tradicional afirmación de que las líneas de corriente necesariamente dan lugar a líneas magnéticas periódicas. Además, mediante simulaciones numéricas, mostramos la gran variedad de líneas magnéticas que se puede obtener con simplísimas y nada costosas configuraciones de cables. Finalmente, proponemos una verificación experimental de estos resultados, así como posibles campos de aplicación.

## Bibliografía

- [1] F. González-Gascón y D. Peralta-Salas, *Some properties of the magnetic fields generated by symmetric configurations of wires*, Phys. D **206**, 109 (2005).
- [2] E. M. Haacke *et al.*, *Magnetic Resonance Imaging*, Wiley, New York (1999).
- [3] F. Kiessling, P. Nefzger y J. F. Nolasco, *Overhead Power Lines*, Springer, New York (2003).
- [4] C. J. A. Pires *et al.*, *Magnetic field structure in the TCABR tokamak due to ergodic limiters with a non-uniform current distribution: theoretical and experi-*



*mental results*, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 1609 (2005).

- [5] D. I. Pontin, E. R. Priest y D. W. Longcope, *A framework for understanding the topology of complex coronal structures*, Solar Phys. **212**, 319 (2003).
- [6] J. Aguirre y D. Peralta-Salas, *Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires*, enviado (2006).
- [7] J. Aguirre, J. Giné y D. Peralta-Salas, *Integrability of magnetic fields created by current distributions*, enviado (2007).

---

## Resonancia fantasma determinista

Javier M. Buldú

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Calle Tulipán s/n*  
*28933 - Móstoles (Madrid)*

E-MAIL: [javier.buldu@urjc.es](mailto:javier.buldu@urjc.es)

WWW: [www.escet.urjc.es/~fisica/personal/jbuldu](http://www.escet.urjc.es/~fisica/personal/jbuldu)

COLABORADORES: Xavier Vidal (Institut de Ciències Fotòniques, UPC), Pablo Balenzuela (Universidad de Buenos Aires), Jordi Martorell (Institut de Ciències Fotòniques, UPC) y Jordi García-Ojalvo (Universitat Politècnica de Catalunya)

El detección del *fundamental ausente* es un fenómeno cautivador que se conoce y estudia desde la antigua Grecia. Cuando *oímos* dos notas fundamentales y sus frecuencias guardan cierta relación entre ellas, nuestro cerebro es capaz de procesar ambas señales haciéndonos *escuchar* una tercera nota que en realidad nunca llegó a nuestros oídos. Este fenómeno, que ya se utiliza incluso en el diseño de altavoces de baja frecuencia, es ampliamente conocido aunque no del todo comprendido. En un principio, se asumió que la señal detectada por el cerebro no era más que la frecuencia fundamental de las señales externas, y que éstas debían estar compuestas por armónicos de dicha frecuencia fundamental. Sin embargo, Schouten [1], en los años 60, demostró que cuando las señales externas son incommensurables el cerebro es aún capaz de detectar una frecuencia inexistente y que a su vez, no es la fundamental de las señales externas. Recientemente, Chialvo *et al.* [2] proponen un mecanismo estocástico para explicar el fenómeno del fundamental ausente y predicen teóricamente cuál será la frecuencia escuchada por el cerebro cuando las señales externas no son commensurables. Este fenómeno, extensible a otro tipo de sistemas siempre que estos sean excitables, se conoce actualmente como resonancia fantasma. En el presente trabajo, partiremos de las tesis propuestas por Chialvo *et al.* para predecir las frecuencias fantasmas y demostraremos que no es necesario ni que el sistema sea excitable ni la presencia de ruido en el mismo. En otras palabras, mostraremos que la resonancia fantasma puede ocurrir en sistemas completamente deterministas. Para ello utilizaremos un sistema óptico en el que, mediante la combinación de dos señales pulsadas (“señales de entrada”) dentro de un cristal no lineal, generaremos una señal de segundo armónico cuya frecuencia dinámica no se corresponde con la fre-

cuencia de ninguna de las señales de entrada. Mediante este experimento, acompañado de un estudio teórico, demostraremos la existencia de una resonancia fantasma *determinista* que se basa únicamente en la detección de coincidencias entre señales de entrada pulsadas [3].

## Bibliografía

- [1] J. F. Schouten, R.J. Ritsma, and B.L. Cardozo, *Pitch of the residue*, J. Acoust. Soc. Am. **34**, 1418-1424 (1962).
- [2] D. R. Chialvo, O. Calvo, D. L. Gonzalez, O. Piro and G. V. Savino, *Subharmonic stochastic synchronization and resonance in neuronal systems*, Phys. Rev. E **65**, 050902(R) (2002)
- [3] Xavier Vidal, Pablo Balenzuela, Javier M. Buldú, Jordi Martorell and Jordi García-Ojalvo, *Coincidence detection of inharmonic pulses in a nonlinear crystal*, Phys. Rev. E, **75**, 012902 (2007)

---

## Caracterización de la dimensión fractal en la dispersión caótica disipativa

Jesús M. Seoane

*Departamento de Física*  
*Universidad Rey Juan Carlos*  
*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*  
*28933 - Móstoles, Madrid*

E-MAIL: [jesus.seoane@urjc.es](mailto:jesus.seoane@urjc.es)

WWW: <http://www.escet.urjc.es/~fisica/>

COLABORADORES: Miguel A. F. Sanjuán (Universidad Rey Juan Carlos), Ying-Cheng Lai (Arizona State University)

El efecto de la débil disipación en problemas de dispersión caótica es de gran relevancia en muchas situaciones físicas que son objetos de interés y estudio. En la dispersión caótica podemos distinguir dos tipos de regímenes, hiperbólico y no hiperbólico, siendo la dinámica de este último muy sensible a los parámetros del sistema, y que será en el cual centramos nuestro estudio. Trabajos anteriores estudiaron el efecto que la débil disipación producía sobre la ley de supervivencia de las partículas en la región de dispersión [1] y sobre las cuencas de atracción del sistema [2]. El estudio de la dimensión fractal del conjunto de singularidades de la función de dispersión se ha llevado a cabo para el caso conservativo [3], mostrando que su valor era la unidad. En este trabajo centramos la atención en el comportamiento de la dimensión fractal cuando introducimos disipación en nuestro sistema. Usamos como modelos, con idea de mostrar que el comportamiento obtenido es de carácter general e independiente del sistema en cuestión, un flujo bidimensional disipativo y una aplicación discreta no conservativa. Simulaciones numéricas muestran en ambos casos un comportamiento cualitativamente idéntico. La curva de variación de la dimensión fractal frente al parámetro disipativo muestra dos regiones bien diferenciadas, una de ellas en la que la dimensión fractal decrece rápidamente y otra en la cual su variación es muy lenta. Finalmente proporcionamos argumentos teóricos de tipo

heurístico que nos corroboran los resultados numéricos obtenidos [4].

## Bibliografía

- [1] A. E. Motter, Y-C. Lai, *Dissipative chaotic scattering*, Phys. Rev. E **65**, 015205(R) (2001).
- [2] J. M. Seoane, J. Aguirre, Miguel A. F. Sanjuán, and Y-C Lai, *Basin topology in dissipative chaotic scattering*, Chaos **16**, 023101 (2006).
- [3] Y. T. Lau, J. M. Finn, and E. Ott, *Fractal dimension in nonhyperbolic chaotic scattering*, Phys. Rev. Lett. **66**, 978 (1991).
- [4] J. M. Seoane, Miguel A. F. Sanjuán, and Y-C Lai, *Fractal dimension in dissipative chaotic scattering*, Phys. Rev. E (Submitted).

---

## Estructura cósmica multifractal y vacíos cósmicos

José Gaité  
 IDR/UPM, ETSI Aeronauticos,  
 Universidad Politecnica de Madrid,  
 Pza. Cardenal Cisneros 3,  
 28040 Madrid, Spain.

E-MAIL: jose.gaité@upm.es  
 WWW: <http://www.imaff.csic.es/pcc/Gaité/>

Las observaciones cosmológicas muestran varios aspectos de la invariancia de escala de la distribución de materia en escalas grandes. La descripción de los cúmulos y supercúmulos de galaxias mediante modelos fractales es ya clásica. Hoy día, se estudian los *vacíos cósmicos*. Hemos descrito la invariancia de escala de los vacíos cósmicos mediante la ley de Zipf de su ordenamiento por tamaños [1]. Recientemente, se ha descubierto evidencia observacional de esta ley de Zipf [2].

La mayor parte de la materia es oscura y no puede ser observada directamente. Por ello, y por el interés intrínseco del estudio de la dinámica de la formación de estructuras mediante la inestabilidad gravitatoria, se simula este proceso en los ordenadores. Hemos estudiado los resultados de una simulación reciente de la dinámica gravitatoria de  $64 \cdot 10^6$  partículas. Nuestro estudio demuestra que la dinámica posee un *atractor multifractal*, cuyo espectro calculamos [3]. Además, este estudio nos permite dar definiciones de los conceptos de *halo* de materia oscura y de *vacío cósmico* consistentes con la invariancia de escala. Estos conceptos son básicos en la teoría moderna de la formación de estructuras cosmológicas, así que nuestro estudio abre el camino hacia su síntesis con los potentes métodos basados en la invariancia de escala.

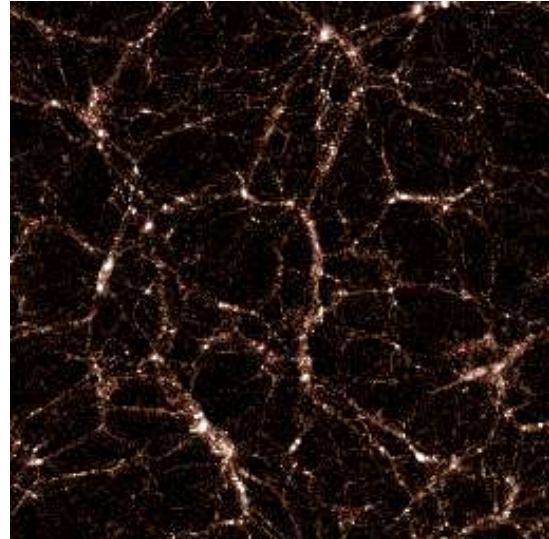


Fig. 1: Multifractal producido en una simulación cosmológica. Se pueden observar las estructuras filamentosas formadas por halos de materia y los vacíos que dejan.

## Bibliografía

- [1] J. Gaité y S.C. Manrubia, *Scaling of voids and fractality in the galaxy distribution*, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **335**, 977–983 (2002);  
 J. Gaité, *Zipf's law for fractal voids and a new void-finder*, European Physical Journal B **47**, 93–98 (2005);  
 J. Gaité, *Cut-out sets and the Zipf law for fractal voids*, Physica D **223**, 248–255 (2006).
  - [2] A.V. Tikhonov y I.D. Karachentsev, *Minivoids in the Local Volume*, The Astrophysical Journal **653** 969–976 (2006);  
 A.V. Tikhonov, *Properties of Voids in the 2dFGRS Galaxy Survey*, Astronomy Letters **32** 727–733 (2006).
  - [3] J. Gaité, *The fractal distributions of haloes*, Europhysics Letters **71**, 332–338 (2005);  
 J. Gaité, *Halos and voids in a multifractal model of cosmic structure*, astro-ph/0604202, The Astrophysical Journal (en prensa);  
 J. Gaité y A. Domínguez, *Scaling Laws in the Cosmic Structure and Renormalization Group*, astro-ph/0610886, Journal of Physics A (en prensa).
-

## Energía Eólica: Estudio de Series Temporales de Velocidades de Viento usando Técnicas No Lineales

Juan Antonio Martínez

Grupo de Investigación Interdisciplinar en Sistemas Dinámicos ( $GI^2SD$ )

Escuela Politécnica Superior de Albacete (EPSA)

Universidad de Castilla-La Mancha

02071 - Avenida de España s/n, Albacete

E-MAIL: [juan.mmartinez@uclm.es](mailto:juan.mmartinez@uclm.es)

WWW: <http://www.poincare.pol-ab.uclm.es>

COLABORADORES: Emilio A. López, Juan José Miralles, María del Mar Artigao, Manuel Sánchez

La innegable importancia de la creciente utilización de Energías Renovables, obliga a conjugar la rentabilidad de éstas, con la fiabilidad en el compromiso de suministro al potencial cliente. Una de las opciones que presenta un mayor auge en su utilización es la energía Eólica, sin embargo, el principal inconveniente con el que uno se encuentra ante esta modalidad es, su elevada dificultad, a la hora de realizar una correcta predicción, con un mínimo índice de seguridad, incluso a muy corto plazo. A pesar de que las compañías disponen de gran cantidad de datos, recogidos a lo largo de muchos años, éstos solamente han sido utilizados, casi en su práctica totalidad, en realizar análisis estadísticos para elaborar unas previsiones de la posible producción energética media obtenida anualmente, obviamente, con vistas al interés desde un punto de vista de rentabilidad puramente empresarial.

No obstante, el problema sobre la disponibilidad de un suministro fiable, con una anterioridad de, pongamos, 24 horas, sigue prácticamente sin resolverse. Esto es así, debido a la reconocida complejidad de realizar predicciones meteorológicas "exactas".

La opción clásica que se ha utilizado convencionalmente para realizar estas previsiones, se ha basado en la elaboración de unos modelos climatológicos locales, en base a datos anteriores y cercanos, geología del terreno y criterios físicos del campo de la meteorología. Ahora bien, desde hace algunas décadas, con la introducción del paradigma del Caos, han ido apareciendo nuevas técnicas para un mejor acercamiento a problemas tradicionalmente considerados como complejos, a pesar de su innegable ubicuidad en la Naturaleza. En particular, una de estas nuevas técnicas, nos permitiría, en base a una serie de Teoremas del Embedding, y en especial al teorema de reconstrucción de Takens, estudiar (y bajo ciertas condiciones, predecir) el comportamiento de un sistema, a partir de una serie de medidas experimentales de, solamente, alguno de sus observables físicos. En base a ello, se ha desarrollado (todavía no de forma completa) el llamado Análisis No Lineal de Series Temporales, que está siendo ampliamente utilizado en un extenso abanico de campos: biología, medicina, economía, mecánica, astrofísica y, por supuesto, meteorología. La principal ventaja de este enfoque frente al método clásico, estriba en la no necesidad de elaboración de ningún modelo de comportamiento. Si estas técnicas son aplicables o no para analizar series temporales de medidas de viento, con la principal finalidad de predicciones fiables, es el

principal eje de nuestro actual trabajo.

En el punto en que actualmente nos encontramos, se trata de discernir si estos datos experimentales presentan una estructura puramente estocástica o, si por el contrario, nos encontramos ante un sistema complejo de alta dimensionalidad, pero determinista. Los resultados obtenidos hasta el momento confirman esta segunda opción, pero deben analizarse una gran cantidad de estas series, para asegurarnos de que este resultado es el habitual, y no que se trata de una situación excepcional. El siguiente paso sería determinar si es posible la predicción y con qué alcance. Por último, debería indicarse el método más adecuado para realizar estas predicciones y su forma de proceder.

## Bibliografía

- [1] F. Takens et al., *Detecting strange attractors in turbulence*, Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics **898**, 366–381 (1981).
- [2] H. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer, New York (1996).
- [3] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press(1999).

---

## Escisión de separatrices para el péndulo con un forzamiento periódico rápido

Marcel Guardia Munarriz

Departament de Matemàtica Aplicada 1,

Universitat Politècnica de Catalunya

Av. Diagonal, 647

08028, Barcelona, España

E-MAIL: [marcel.guardia@upc.edu](mailto:marcel.guardia@upc.edu)

WWW: <http://www.ma1.upc.edu/personal/guardia.html>

COLABORADORES: Teresa Martínez-Seara Alonso

Uno de los problemas fundamentales de los Sistemas Dinámicos Hamiltonianos es determinar las zonas de estabilidad del sistema. Para muchos modelos físicos, aceleradores de partículas, modelos moleculares, estas regiones rodean los puntos elípticos del sistema y su frontera viene dada por las variedades invariantes estables e inestables asociadas a puntos hiperbólicos vecinos.

Por todo ello, es un problema fundamental saber si estas variedades coinciden a lo largo de una conexión homoclínica o intersecan transversalmente. De hecho, Poincaré ya consideraba el estudio de la escisión de las conexiones homoclínicas o heteroclínicas para los sistemas cercanos a integrables como uno de los problemas fundamentales de la dinámica.

Para problemas de perturbación regular la teoría clásica de Melnikov da la expresión asintótica de la escisión. Sin embargo, cuando la perturbación es dependiente del tiempo y rápida esta escisión es exponencialmente pequeña de modo que, en algunos casos, la teoría clásica de Melnikov no es válida.

Uno de los modelos más empleados para entender este tipo de escisión es el péndulo con una perturbación periódica

ca rápida

$$\ddot{x} = \sin x + \mu \varepsilon^p \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  puede ser grande y  $\varepsilon > 0$  es arbitrariamente pequeño.

El sistema no perturbado tiene un punto crítico hiperbólico en el origen cuyas variedades estables e inestables coinciden a lo largo de una órbita homoclínica. Para  $p \geq -2$  surge una órbita periódica generada por la perturbación con variedades estables e inestables dos dimensionales. Dado que estas variedades son lagrangianas, se estudia su existencia y escisión mediante la ecuación de Hamilton-Jacobi. Se demuestra que efectivamente para  $p > -2$  existe esta escisión y se dará una fórmula de la distancia entre las variedades. Se prueba que para  $p > -3/2$  la teoría de Melnikov es válida y que para  $p(-2, -3/2)$  también lo es haciendo previamente cierto cambio de variables que modifica el sistema no perturbado.

En el caso  $p = -2$ , se mostrará que la distancia entre las variedades ya no viene dada en primer orden por la función de Melnikov. La distancia en este caso se obtiene a partir de la llamada ecuación inner, cuyo estudio, mediante la teoría de la resurgencia de Ecalle, es análogo al realizado en [1].

Técnicas de matching en el plano complejo, completarán el resultado.

## Bibliografía

- [1] C. Olive, D. Sauzin, T. M. Seara, *Resurgence in a Hamilton-Jacobi equation*, Proceedings of the International Conference in Honor of Frédéric Pham (Nice, 2002), Ann. Inst. Fourier (2003).

---

## Reconstrucción de imágenes y estabilidad explícita

María Moncayo Hormigo

*Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
Universidad Politécnica de Cartagena  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial  
Doctor Fleming, s/n. 30202 Cartagena*

E-MAIL: maria.moncayo@upct.es

WWW: <http://www.dmae.upct.es/~mmoncayo/>

COLABORADORES: Sergio Amat Plata

En el tratamiento de imágenes se suelen realizar operaciones tanto lineales como no lineales sobre una representación de la señal, que esté bien adaptada al problema en estudio. El objetivo es, básicamente, conseguir una mejora de la señal original bajo cierto criterio prefijado. En particular, en la compresión de imágenes se realizan este tipo de operaciones sobre una representación multiescala de la señal, en la que se usan bases de wavelets en  $L^2(\mathbb{R})$ . Los coeficientes de la señal a distintos nivel de resolución se obtienen mediante el algoritmo de Mallat en dos dimensiones [1]. Es bien conocido el carácter estable del algoritmo.

En este trabajo nos proponemos completar el estudio de la estabilidad calculando *explícitamente* cotas de error, es decir, cotas independientes del nivel de resolución, tamaño de la señal o imagen, etc. Las cotas exactas de error serán validadas con algunos ejemplos.

## Bibliografía

- [1] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press (1999).

---

## On the structure of 1:4 resonances in conservative Hénon-like maps.

Marina Gonchenko

*Departament de Matemàtica Aplicada I  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Diagonal 647, 08028 Barcelona*

E-MAIL: marina.gonchenko@upc.edu

In this contribution I will overview my results from [1] related to bifurcations of fixed points with multipliers  $e^{\pm i\pi/2}$  (the so-called 1:4 resonances) for the following conservative Hénon-like maps:

- 1) the conservative generalized Hénon maps

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M_1 - x - y^2 + Sy^3;$$

- 2) the conservative cubic Hénon maps

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M_1 - x + M_2y \pm y^3.$$

Here  $(x, y)$  are coordinates in  $\mathbb{R}^2$ ,  $M_1$  and  $M_2$  are parameters,  $S$  is a small coefficient.

In case 1), the bifurcations are nondegenerate if  $S \neq 0$  and they are essentially different depending on the sign of  $S$ . A two-parameter analysis of the bifurcations at the critical moment  $S = 0$  is given.

In case 2), the structure of the 1 : 4 conservative resonances is nondegenerate always for the cubic map with “+”, whereas, in the cubic map with “-” a degenerate situation is observed at  $M_1 = \pm 16/27, M_2 = 1/3$ .

## Bibliografía

- [1] M.S. Gonchenko, *On the structure of 1:4 resonances in Hénon maps*, Int.J. Bifurcation and Chaos **15**, 3653–3660 (2005).

## Modelo cuadrático para simular el crecimiento de una población de peces

Mario Zacarés

Instituto ITACA

Grupo de Redes y Computación de Altas Prestaciones

Universidad Politécnica de Valencia

Camino de Vera s/n

460220 - Valencia, España

E-MAIL: mzacares@upvnet.upv.es

COLABORADORES: Oscar A. González Chong, Dagoberto Acosta Iglesias (Universidad de Pinar del Río, Cuba).

En este trabajo se ha analizado la evolución temporal de la tasa de crecimiento de una biomasa de peces de acuerdo con un modelo no lineal en el que intervienen la dispersión poblacional, el decrecimiento de la población por mortalidad y los efectos de migración. Nuestro modelo propone una tasa de crecimiento específica de la especie de tipo cuadrático. El modelo presentado se resuelve por el método de los elementos finitos usando técnicas upwind y el método de Newton para linealizarlo. Se ha analizado la existencia y unicidad de la solución. Finalmente se ha realizado la simulación numérica de varios casos de interés y se han comparado con otros modelos basados en tasas de crecimiento constantes o lineales. El modelo cuadrático permite una mejor detección del efecto Alle, es decir el alcance del periodo de reproducción óptima de la especie y su decrecimiento posterior. Por último se realiza una valoración de la importancia del modelo para estudios ecológicos en general.

## Bibliografía

- [1] Aroesty J., Lincoln T., Shapiro N. y Boccia G., *Tumor growth and Chemotherapy: Mathematical methods, computer simulations, experimental foundations*, Math. Biosci **17**, 243–300 (1973).
- [2] Diniz G.L., *A mudança no habitat de populações de peixes: De Rio a represa- O modelo Matemático.*, Tesis de maestría, IMECC, UNICAMP Brasil (1994).
- [3] Meyer J. F. C. A. y Diniz G. L., *Changes of habitat of fish populations: A mathematical model*, Int. J. Math. Educ. S. C. I. Technol. **28**, 519–529 (1997).
- [4] Newton, C. M., *BioMathematics in oncology modelling of cellular systems.*, Ann. Rev. Biophys. Bioeng. **9**, 541–579 (1980).
- [5] Skellam, J.G., *Random dispersal in theoretical population.*, Biometrika **38**, 196–218 (1991).
- [6] Smith, F.E., *Population dynamics in Daphnia Magna.*, Ecology **44**, 651–653 (1963).
- [7] Johnson, C., *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.*, Cambridge University Press, New York (1987).

## Image encryption algorithm based on chaotic color mixing

Massimiliano Zanin

Universidad Autónoma de Madrid

28049 Cantoblanco, Madrid, Spain

E-MAIL: massimiliano.zanin@hotmail.com

COLABORADORES: A. N. Pisarchik (Centro de Investigaciones en Optica, Guanajuato, Mexico)

In the last years, cryptography has become a field of great interest in many areas, such as secure data storage, Internet transaction or communication channels; in particular, chaos based encryption schemes have been studied ([2], [3]), due to the high sensitivity of those systems to initial conditions, that assures strong resistance against any statistical attacks. Recently one of us [1] proposed an algorithm for image encryption, based on multiple chaotic logistic maps, one-way coupled by initial conditions, with good cryptographic properties like high sensitivity to secret keys and absence of patterns in the encoded data.

In the present work, we go further in developing a strong chaos-based algorithm for image encryption; moreover, the problem of real-time communication is taken into account, that implies an extremely short encryption /decryption time (EDT), and tolerance to random noise. The basic idea is to convert a  $M \times N$  image to a linear array  $\mathbf{P}$  of  $h = 3MN$  items, each of which represents a single color component of every pixel, with integer values between 0 and 255. The encryption algorithm consists in mixing the components in this array by a chaotic way to obtain a new array of the same length, that can be represented back as an image. More specifically, an uni-dimensional chaotic iterative map

$$x_{n+1} = Q(a, x_n), \quad (1)$$

is defined, where  $Q$  is a nonlinear map function,  $x_n$  is the system state after  $n$  iterations, and  $a$  is the map parameter that acts as a secret key of the system. By this way, we can define the mixing function  $F : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{S}$  such that

$$\mathbf{S} = F(p_j, p_k) \bmod(255), \quad (2)$$

where

$$k = \text{round}[Q_j(x_0)h]. \quad (3)$$

We carried out computer experiments using the well-known logistic map ( $LM$ ) as the map function  $Q$  with a variety of color images. It is easy to show that the most dangerous attack, the known-plaintext attack, is unfeasible, because information is mixed and distributed over whole image in a complex strategy that dissolves any pattern in the original data. To estimate EDT, calculations were made with a standard PC, resulting in about 28 images per second, for an image size of 720 x 480 pixels (standard NTSC television dimension). Moreover, the algorithm demonstrates a good tolerance to noise. When a pixel is modified due to disturbance while transmitting a codified image, color components of the decrypted image are modified; nevertheless, for small noise, only isolated components are affected and hence the overall information to the human eye is

maintained. Thanks to that, this algorithm can be successfully used in encrypted real-time communications, without any special hardware codec.

## Bibliografía

- [1] A. N. Pisarchik *et al.*, *Encryption and decryption of images with chaotic map lattices*, *Chaos* **16**, 033118 (2006).
- [2] K. Kaneko *et al.*, *Complex Systems: Chaos and Beyond: A Constructive Approach with Applications in Life Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (2001).
- [3] S. Wang *et al.*, *Phys. Rev. E* **66**, 065202(R) (2002).

### Trayectorias anormales en sistemas mecánicos con conexión afín

María Barbero Liñán

*Universidad Politécnica de Cataluña*  
*Departamento de Matemática Aplicada IV*  
*C/Jordi Girona 1, Edificio C-3*  
*08034 Barcelona*

E-MAIL: mbarbero@ma4.upc.edu

COLABORADORES: Miguel C. Muñoz Lecanda

En teoría de control óptimo, el Principio del Máximo de Pontryagin [6] da condiciones necesarias, pero no suficientes, de la optimalidad de trayectorias. A partir de los trabajos de Montgomery [5] y Liu y Sussmann [4] sabemos de la existencia de las llamadas trayectorias anormales óptimas. Dichas trayectorias han sido estudiadas en problemas de longitud mínima en geometría subriemanniana [4], lo que da lugar a sistemas de control lineales en los controles, y también en el caso de problemas de tiempo óptimo con sistemas de control-afín [1].

En este trabajo nos centramos en el estudio de sistemas mecánicos con conexión afín, que denotamos por  $(Q, \nabla, \mathcal{Y}, U)$ , donde  $Q$  es la variedad de configuración,  $\mathcal{Y}$  es la distribución de los campos vectoriales de control y  $U$  es el dominio de los controles. Dichos sistemas están gobernados por la ecuación

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = \sum_{a=1}^m u^a(t) Y_a(\gamma(t)),$$

con  $u^a: I \rightarrow U$  funciones medibles y  $\gamma: I \rightarrow Q$  curva absolutamente continua. Sobre ellos planteamos problemas de control óptimo sin especificar la función de coste, ya que la caracterización de trayectorias anormales es independiente de la función de coste. En cambio, la optimalidad de las trayectorias anormales sí depende de la función de coste.

Este sistema de control de segundo orden se puede reescribir como un sistema de primer orden, afín en los controles, en el fibrado tangente  $TQ$ , cuyos campos de control son levantamientos verticales de campos en  $Q$ . Además el campo de deriva es el campo geodésico correspondiente a la conexión  $\nabla$ . Debido a la estructura especial de estos campos vectoriales, los resultados de [1] para determinar trayectorias anormales no son útiles.

A fin de tratar el problema de caracterización de las trayectorias anormales, en primer lugar es necesario garantizar la accesibilidad del sistema, al menos localmente. Para ello se usan resultados de [2,3,7] donde interviene la estructura de ciertas álgebras de Lie libres asociadas a los campos que definen el sistema mediante el producto simétrico definido por la conexión.

Asumiendo que las condiciones suficientes de accesibilidad local se verifican, estudiamos las subvariedades que contengan las trayectorias anormales. Inicialmente se determina el conjunto de puntos que pueden ser condición inicial de trayectorias anormales y mediante un algoritmo de estabilidad se caracterizan dichas subvariedades.

## Bibliografía

- [1] A. A. Agrachev, I. Zelenko, *On feedback classification of control-affine systems with one and two-dimensional inputs*, submitted to SIAM J. Control and Optimization.
- [2] R.M. Bianchini, G. Stefani, *Controllability along a trajectory: a variational approach*, SIAM J. Control and Optimization, **31**,900-927 (1993).
- [3] F. Bullo and A. D. Lewis, *Geometric Control of Mechanical Systems. Modeling, analysis and design for simple mechanical control*, Texts in Applied Mathematics 49, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (2004).
- [4] W. Liu, H. J. Sussmann, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions*, *Memoirs of the American Mathematical Society* 564, Jan. 1996.
- [5] R. Montgomery, *Abnormal Minimizers*, SIAM J. Control and Optimization, **32**, 1605-1620 (1994).
- [6] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mischenko: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, Inc., New York (1962).
- [7] H. J. Sussmann, *A general theorem on local controllability*, SIAM J. Control and Optimization, **25** 158-194 (1987).

### Nuevo método para búsqueda de soluciones estacionarias en sistemas con simetría discreta

M. Zacarés

*Instituto de Matemática Pura y Aplicada*  
*Grupo de Modelización Interdisciplinar, Intertech*  
*Universidad Politécnica de Valencia*  
*Camino de Vera s/n*  
*46022 - Valencia*

E-MAIL: mzacares@upvnet.upv.es

WWW: <http://www.intertech.upv.es>

COLABORADORES: M. Arevalillo

En esta contribución se presenta un nuevo método de búsqueda de soluciones no lineales estacionarias especialmente adaptado a sistemas con simetría discreta. Estos sistemas aparecen en áreas diversas de la física como los

denominados cristales fotónicos [1, 2] en fotónica o los condensados de Bose-Einstein [3] en materia condensada. La característica singular del método radica en el uso de la teoría de grupos. Esta potente herramienta matemática aplicada a sistemas con invariancia discreta determina las propiedades bajo transformaciones de simetría de cualquier solución simétrica del sistema. En el caso no lineal esta información es particularmente útil pues generalmente se desconoce a priori la forma de la solución. El método explota estas propiedades para moverse en el espacio de soluciones. El algoritmo fija únicamente la representación del grupo o equivalentemente las propiedades de simetría de la solución. Si ésta existe, el algoritmo converge rápidamente mediante un proceso iterativo que se mueve únicamente en el subespacio de esa representación.

## Bibliografía

- [1] A. Ferrando, M. Zacarés, P. Fernández de Córdoba, D. Binosi y J.A. Monsoriu, *Spatial Soliton Formation in Photonic Crystal Fibers*, Opt.Express **11**, 452 (2003).
- [2] D. Neshev, E. Ostrovskaya, Y. Kivshar, y W. Krolikowski, *Spatial solitons in optically induced gratings*, Opt.Lett. **28**, 710 (2003).
- [3] E. Ostrovskaya y Y. Kivshar, *Matter-wave gap solitons in atomic band-gap structures*, Phys.Rev.Lett. **90**, 160407 (2003).

---

## Entropía en Redes Complejas Espaciales

Massimiliano Zanin

Universidad Autónoma de Madrid  
28049 Cantoblanco, Madrid, Spain

E-MAIL: massimiliano.zanin@hotmail.com

COLABORADORES: Javier M. Buldú (Universidad Rey Juan Carlos), Pedro Cano (Universitat Pompeu Fabra)

Durante los últimos años se ha producido un gran avance en la comprensión de la estructura y dinámica de las redes complejas. Sin duda, uno de los principales catalizadores fue el trabajo publicado en el año 1998 por Watts y Strogatz [1] donde se definen las características principales de lo que se conoce como “redes de pequeño mundo” (small-world networks). Un año más tarde, Barabasi y Albert publican los primeros resultados sobre lo que se denominan “redes de escala libre” (scale-free networks) [2]. Desde entonces, el número de publicaciones referentes al estudio de las redes complejas ha crecido de manera espectacular año tras año. Desde el punto de vista de la estructura de una red, entendida como nodos (o vértices) conectados por enlaces (o aristas), es posible calcular una serie de parámetros que proporcionan información sobre el tipo de red con la que nos encontramos. El camino medio entre nodos, la distribución de grado (siendo el grado de un nodo su número de enlaces) o la centralidad de un nodo (relacionada con el número de caminos más cortos entre dos nodos cualesquiera que pasan por un tercer nodo) pueden dar información, por ejemplo, sobre como se ha formado la red o cual es su respuesta frente a pérdidas de nodos o enlaces. En el presente

trabajo nos centraremos en el estudio de redes complejas espaciales, es decir, redes cuyos nodos se encuentran distribuidos sobre un espacio Euclídeo. El objetivo principal es definir el concepto de entropía asociado a una red espacial, es decir, un parámetro que permita estimar el grado de desorden de la red. Dicho parámetro debe permitir el comparar redes de distinto tamaño y número de enlaces, debiéndose obtener por lo tanto un valor normalizado. Finalmente, la entropía de la red nos permitirá elegir la estrategia óptima para navegar dentro de ella, algo que es de vital importancia, por ejemplo, en redes de recomendación.

Supongamos que nos hayamos situados en uno de los nodos de la red y deseamos desplazarnos a otro nodo al que no estamos conectados directamente (“nodo objetivo”). Si queremos avanzar recorriendo la mínima distancia, lo más lógico es desplazarnos al nodo adyacente que se encuentre más cerca del nodo objetivo. Esta estrategia, que es sin duda la mejor en el caso de una red regular, no lo es en una red donde las conexiones están distribuidas de manera compleja. Sin embargo, es posible definir una Entropía del Mínimo Camino (“shortest-path entropy”)  $E_{sp}$  como la *información necesaria para recorrer la mínima distancia al desplazarse entre dos nodos cualesquiera de la red*:

$$E_{sp} = - \frac{\sum \ln_2 \frac{1}{\#c}}{n-1} \quad (1)$$

donde  $n$  es el número de nodos recorridos en el camino y  $\#c$  es orden más lógico del enlace de salida (1 si va al nodo más cercano al objetivo, 2 si va al segundo más cercano, etc ...). La entropía de la red nos permitirá, de esta manera, obtener el grado de desorden de la red espacial. En el presente trabajo calculamos la entropía de varias redes de aeropuertos europeos, mostrando las diferencias en el grado de desorden de dichas redes espaciales. Finalmente, demostramos que el concepto de entropía es también aplicable a redes donde los nodos tienen una característica propia que se pueda cuantificar (“fitness”).

## Bibliografía

- [1] D. J. Watts and S.H. Strogatz, *Collective dynamics of small-world networks*, Nature **393**, 440 (1998).
- [2] A.-L. Barabási and R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286**, 509 (1999).

---

## Familias de centros en sistemas diferenciales polinomiales planos

Paz de Prada

Departament de Matemàtica  
Universitat de Lleida  
Alda. Jaume II, 69  
25006 Lleida

E-MAIL: pdeprada@matematica.udl.es

COLABORADORES: Jaume Giné

Este trabajo se enmarca en el problema del centro no degenerado en sistemas polinomiales planos. Más específicamente estudiaremos primero sistemas polinomiales de la

forma:

$$\dot{x} = -y + xR(x, y), \quad \dot{y} = x + yR(x, y),$$

con  $R(x, y) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y)$  donde  $f_i$  son polinomios homogéneos de grado  $i$ . Estos sistemas son llamados *isócronos rígidos* y en coordenadas polares toman la forma  $\dot{r} = F(r, \theta)$ ,  $\dot{\theta} = 1$ . El problema del centro para dichos sistemas ha sido estudiado por distintos autores. El caso en que  $R(x, y)$  sea un polinomio homogéneo de grado  $i$ , el caso no homogéneo con  $R(x, y) = f_1 + f_2 + f_3$  con  $f_1 f_2 f_3 \neq 0$  y el caso  $R(x, y) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$  con  $f_4 \neq 0$  y una única  $f_i$  no nula, con  $i = 1, 2, 3$ . También se han estudiado los casos  $R(x, y) = f_1 + f_n$  y  $R(x, y) = f_2(x, y) + f_{2n}$  con  $n \in \mathbb{N}$ . En todos ellos, las familias de centros que aparecen son reversibles, es decir, simétricos respecto a una recta que pasa por el origen, cambiando la dirección del tiempo y son invariantes bajo la transformación:  $(x, y, t) \rightarrow (x, -y, -t)$  o  $(x, y, t) \rightarrow (-x, y, -t)$ , módulo una rotación.

En este trabajo se estudia la existencia de centros no reversibles en los sistemas isócronos rígidos y la posible forma de sus conmutadores.

La segunda familia de sistemas polinomiales que se estudia es

$$\dot{x} = -y + F(x), \quad \dot{y} = x + G(y),$$

donde  $F(x)$  y  $G(y)$  son polinomios sin términos constantes ni lineales. Estos sistemas reciben el nombre de sistemas de *BiLiénard*. El problema del centro ha sido estudiado con  $F(x)$  y  $G(y)$  polinomios hasta cuarto grado y se conocen familias de centro para  $F(x)$  y  $G(y)$  de grado arbitrario. En este trabajo clasificamos todos los centros de los sistemas de BiLiénard hasta grado 5.

## Dinámica de sistemas noholonómicos

Rafael Ramírez

*Universitat Rovira i Virgili*  
Tarragona

E-MAIL: [rafaelorlando.ramirez@urv.cat](mailto:rafaelorlando.ramirez@urv.cat)

COLABORADORES: N. Sadovskaia (Universitat Politècnica de Catalunya)

“The history of nonholonomic mechanical systems is long and complex. There has been recurring confusion over the very equations of motion as well as the deeper questions associated with the geometry and analysis of these equations.

First of all, in terms of the equations of motion themselves, the confusion has mainly centered on whether or not the equations can be derived from a variational principle in the usual sense. But there is not doubt that the correct equations of motion for nonholonomic systems are given by the Lagrange-d'Alembert principle.” [1].

In this communication we propose a mathematical model (*A-model*) to describe the behavior of the nonholonomic systems. This approach is based on the generalized Hamiltonian Principle, with nonzero transpositional relations. By comparing the propose mathematical model with the one from mechanics, we prove the importance of the A-model.

We apply the A-model to study the Generalized Vorones-Chapliguin systems for which the independent variations generate the zero transpositional relations.

We illustrate our results with several examples. In particular we study the homogenous sphere on a horizontal plane which rotates with a constant angular velocity.

## Bibliografía

- [1] Tomado de: A. M. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag (2003).

## Aplicación de la Entropía Muestral para la predicción de recurrencias en episodios de Fibrilación Auricular

Raquel Cervigón Abad

*Universidad de Castilla-La Mancha*  
*Escuela Universitaria Politécnica*  
*Campus Universitario*  
*Camino del Pozuelo sn*  
*16071 - Cuenca, España*

E-MAIL: [raquel.cervigon@uclm.es](mailto:raquel.cervigon@uclm.es)

WWW: <http://www.uclm.es>

COLABORADORES: Raúl Alcaraz (Universidad de Castilla-La Mancha), Carlos Vayá (Universidad de Castilla-La Mancha), José Millet (Universidad Politécnica de Valencia), César Sánchez (Universidad de Castilla-La Mancha)

La fibrilación auricular (FA) es la arritmia cardíaca sostenida encontrada con mayor frecuencia en la práctica clínica. Afecta al 0.6 % de la población, y al 6 % y 8 % de los sujetos mayores de 60 y 80 años, respectivamente [1, 2]. Los pacientes con FA tienen una morbilidad cinco veces y el doble de mortalidad que los que tienen ritmo sinusal [4, 3, 5].

La FA se caracteriza por una actividad auricular desordenada, formada por múltiples frentes de onda de activación simultánea. Las ondas *p* en el electrocardiograma son sustituidas por las denominadas ondas *f*, que consisten en una línea basal ondulante. Su manejo se dirige a intentar revertir la arritmia o controlar su frecuencia, previniendo la formación de trombos por el consecuente riesgo de embolización, siendo a priori, la recuperación de la contracción auricular el objetivo más deseable.

Las técnicas utilizadas para la restauración del ritmo sinusal engloban, el control farmacológico de los mecanismos bioquímicos y estructurales que favorecen su inicio (cardioversión farmacológica), la aplicación de un shock eléctrico para recuperar el ritmo sinusal (cardioversión eléctrica), y la ablación de las venas pulmonares para abolir los focos de origen, si bien, ninguna de las citadas vías de tratamiento es totalmente satisfactoria.

A pesar de que la cardioversión eléctrica externa (CVE) tiene una alta tasa de éxito alcanzando el 94 %, aproximadamente el 50 % de los pacientes en los que la FA se revierte a ritmo sinusal experimentan recurrencia en la misma durante el primer año bajo tratamiento antiarrítmico, recurrencia que suele ocurrir durante el primer mes de éste.



Estas cifras pueden llegar hasta un 80% en ausencia de fármacos antiarrítmicos. Esto hace que el tratamiento de la FA sea frecuentemente insatisfactorio y con gran repercusión sobre la calidad de vida.

Los mecanismos que provocan la iniciación de la FA han sido motivo de una extensa investigación en la última década. Numerosos estudios han relacionado dichas recurrencias con distintos variables como son: la existencia de alguna cardiopatía asociada, el incremento del diámetro de la aurícula izquierda, la antigüedad o tiempo de evolución de la arritmia, la edad del paciente o la disminución del periodo refractario auricular [6, 7, 8], estando relacionadas estas últimas de manera inversa con la efectividad de la cardioversión a largo plazo.

Una de las hipótesis es que el sistema nervioso autónomo (SNA) pueda influir en la iniciación de la FA. El incremento del tono vagal podría predisponer para el desarrollo de FA. Técnicas de análisis no lineal como la entropía han sido evaluadas en el estudio de diferentes señales fisiológicas. Su aplicación a la variabilidad del ritmo cardíaco ha revelado prometedores resultados en la valoración del riesgo cardíaco [9, 10, 11].

La entropía puede ser considerada como una medida de la regularidad de las series temporales. En este estudio se ha aplicado la entropía muestreada (SampEn) a señales electrocardiográficas, para predecir las posibles recurrencias posteriores a una CVE exitosa a partir de los cambios en la complejidad del ritmo cardíaco y en la actividad auricular. Esta medida de entropía excluye la dependencia de la longitud de la serie temporal analizada y la medida de probabilidad se calcula directamente como el logaritmo de la probabilidad condicional, en lugar de la relación de sumas logarítmicas.

Los resultados obtenidos en este estudio permiten afirmar que existen diferencias estadísticamente significativas entre las medidas de complejidad extraídas de señales pertenecientes a los sujetos que recurren frente a aquellos que mantienen el ritmo sinusal ( $p < 0.017\%$ ), alcanzando una capacidad de diagnóstico del 74,39%. Un ejemplo de ello es la medida de la entropía correspondiente a las señales actividad auricular extraídas de los episodios registrados, que muestra un comportamiento más regular en los pacientes sin posteriores recurrencias (valores de entropía menores) que en aquellos que recurren en la arritmia.

La aplicación de la entropía a las señales electrocardiográficas podría tener importantes implicaciones en la predicción de la evolución de los episodios de FA; no obstante, es necesaria una investigación más amplia con mayor número de muestras para confrontar los resultados obtenidos en este trabajo.

## Bibliografía

- [1] S. Levy, G. Breithardt, R.W. Campbell, A.J. Camm, J.C. Daubert, M. Allessie, et al., *Atrial fibrillation: current knowledge and recommendations for management. Working Group on Arrhythmias of the European Society of Cardiology*, Eur Heart J ; **19(9)**: 1294–320 (1998).
- [2] E.J. Benjamin, D. Levy, S.M. Vaziri, R.B. D'Agostino, A.J. Belanger, P.A. Wolf, *Independent risk factors for atrial fibrillation in a population-based cohort*, The Framingham Heart Study. JAMA **271**, 840–844 (1994).
- [3] N.S. Lok NS, C.P. Lau, *Presentation and management of patients admitted with atrial fibrillation: A review of 291 cases in a regional hospital*, Int J Cardiol **48**, 271–278 (1995).
- [4] W.A. Wattigney, G.A. Mensah, J.B. Croft, *Increased atrial fibrillation mortality: United States, 1980-1998*, Am J Epidemiol **155**, 819–826 (2002).
- [5] H.J. Crijns, G. Tjeerdsma, P.J. de Kam, F. Boomsma, I.C. van Gelder, M.P. van den Berg, et al, *Prognostic value of the with advanced chronic heart failure*, Eur Heart J **21**, 1238–1245 (2000).
- [6] A. Bollmann, D. Hussuer, R. Steinert, M. Stridh, L. Sörnmo, B. Olsson, D. Polywka, J. Polling, C. Geller, H. Klein, *Ecocardiographic and electrocardiographic predictors for atrial fibrillation recurrence following cardioversion*, Cardiovasc Electrophysiol **14**, 162–165 (2003).
- [7] A. Shimizu, O.A. Centurión, *Electrophysiological properties of the human atrium in atrial fibrillation*, Cardiovascular Research **54**, 302–314 (2002).
- [8] M. Stridh, L. Sörnmo, C.J. Meurling, S.B. Olsson, *Characterization of Atrial Fibrillation Using the Surface ECG: Time-Dependent Spectral Properties*, IEEE Trans Biomed Eng **48**, (2001).
- [9] S. Vikman, T.H. Makikallio, S. Yli-Mayry, S. Pikkujamsa, A.M. Koivisto, P. Reinikainen, K.E. Airaksinen, H.V. Huikuri, *Altered complexity and correlation properties of R-R interval dynamics before the spontaneous onset of paroxysmal atrial fibrillation*, Circulation **100**, 207p9–2984 (1999).
- [10] C.W. Jr. Hogue, P.P. Domitrovich, P.K. Stein, G.D. Despotis, L. Re, R.B. Schuessler, R.E. Kleiger, J.N. Rottman, *R-R interval dynamics before atrial fibrillation in patients after coronary artery bypass graft surgery*, Circulation **98**, 429–434 (1998).
- [11] D.E. Lake, J.S. Richman, M.P. Griffin, J.R. Moorman, *Sample entropy analysis of neonatal heart rate variability*, Am J Physiol Regul Integr Comp Physiol **283**, 789–797 (2002).

---

## Estudio numérico de la evolución paramétrica en sistemas disipativos: ecuaciones de Lorenz

R. Barrio  
 GME, Depto. Matemática Aplicada,  
 Universidad de Zaragoza,  
 E-50009 Zaragoza.

E-MAIL: rbarrio@unizar.es  
 WWW: http://gme.unizar.es

COLABORADORES: S. Serrano (Universidad de Zaragoza),  
 F. Blesa (Universidad de Zaragoza)

El sistema de Lorenz [4]

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz,$$

es el problema por excelencia a la hora de hablar de sistemas caóticos disipativos. A lo largo de los últimos 40 años ha sido estudiado utilizando diversas técnicas, tanto numéricas como analíticas. En dicho sistema aparecen tres parámetros de control adimensionales:  $\sigma$  el número de Prandtl,  $b$ , y  $r$  el número de Rayleigh relativo. Este modelo es una versión altamente simplificada de un problema real para el cual ciertos valores de los parámetros no tiene sentido, pero desde el punto de vista matemático una interesante pregunta es la siguiente: ¿cómo evoluciona el sistema de Lorenz con respecto de los tres parámetros? En la literatura la mayor parte de los análisis se restringen a fijar dos de ellos y variar uno o, a lo sumo, fijar uno de los parámetros y cambiar los otros dos [3]. En esta comunicación estudiamos el sistema de Lorenz con respecto de los tres parámetros, dando por tanto una visión global del mismo. Para ello utilizamos diversas técnicas numéricas, siendo la más útil el recientemente introducido indicador de caos OFLI2 [1, 2], el cual nos permite localizar las regiones en las cuales podemos esperar un comportamiento caótico.

Los resultados obtenidos con OFLI2 se comparan con los obtenidos con MLE (Maximum Lyapunov Exponent) y con diagramas de bifurcaciones realizados con AUTO.

## Bibliografía

- [1] R. Barrio, *Sensitivity tools vs. Poincaré sections*, Chaos Solitons Fractals **25**, 711–726 (2005).
  - [2] R. Barrio, *Painting chaos: a gallery of sensitivity plots of classical problems*, Internat. J. Bifur. Chaos **16**, 2777–2798 (2006).
  - [3] H.R. Dullin, S. Schmidt, P.H. Richter and S.K. Grossmann, *Extended phase diagram of the Lorenz model*, Internat. J. Bifur. Chaos (in press) (2007).
  - [4] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, **20**, 130–141 (1963).
-

# Índice alfabético

- Álvarez Marañón, Gonzalo, 24  
Álvarez, María Jesús, 48
- Aguirre Araujo, Jacobo, 58, 94  
Aguirre, Carlos, 88  
Alcaraz Martínez, Raul, 52  
Alexandrescu, Adrian, 86  
Almendral Sánchez, Juan Antonio, 63  
Alvarez-Lacalle, Enric, 90  
Alvarez-Lacalle, Enrique, 63  
Amat, Sergio, 32  
Amigó, José María, 79  
Aparici, Alberto, 86  
Archilla, Juan F. R., 66  
Arenas Pingarrón, Álvaro, 50  
Arranz, Francisco Javier, 47  
Artigao, María del Mar, 79  
Avila, Marc, 80
- Barbero Liñán, María, 100  
Barrio, R., 103  
Belmonte Beitia, Juan, 45  
Benítez Iglesias, Raúl, 42  
Benita, José Manuel, 43  
Bermúdez, Concha, 89  
Blesa, Fernando, 30  
Borondo, Florentino, 68  
Bragard, Jean, 71  
Bravo de la Parra, Rafael, 24  
Buldú, Javier M., 71, 95  
Busquier, Sonia, 62
- Cárdenas Villalobos, Juan Pablo, 74  
Caballero Pintado, M<sup>a</sup> Victoria, 49  
Cano Casanova, Santiago, 59  
Carmona Centeno, Victoriano, 40  
Carr, Lincoln D., 69  
Cervigón Abad, Raquel, 102
- de Prada, Paz, 101  
de Valcárcel, Germán J., 64  
Deco, Gustavo, 21  
Drubi Vega, Fátima, 56  
Dzhanoev, Arsen, 40
- Echebarria, Blas, 52  
Elizalde, Emilio, 61  
Elorza, Jorge, 36  
Escribano Salazar, Bruno, 66  
Escudero, Carlos, 22  
Espinosa, Víctor, 73
- Falcó, Antonio, 50  
Ferrando, Albert, 39
- Gómez Lopera, Juan Francisco, 35  
Gómez, Javier B., 21  
Gómez-Ullate Oteiza, David, 49  
Gaité, José, 96  
Gaité, Jose, 33  
Galo Sánchez, José Román, 31  
García, Isaac A., 41  
García-March, Miguel Ángel, 37  
García Guirao, Juan Luis, 55  
Gonchenko, Marina, 98  
Grau Montaña, Maite, 78  
Guardia Munarriz, Marcel, 97
- Hernández-Bermejo, Benito, 71, 88  
Herrera, Manuel, 78  
Herrero, Henar, 25  
Hochberg, David, 54
- Iñarrea, Manuel, 68  
Ibarz Gabardós, Borja, 62  
Izquierdo Estallo, Salvador, 81
- Jiménez, Salvador, 61
- Konotop, Vladimir V., 36
- Lara, Martín, 60  
Larreal B., Oswaldo J., 64  
Leyva Callejas, Inmaculada, 70  
Linero Bas, Antonio, 75  
Lopez, Juan M., 38  
Losada, Juan Carlos, 54  
Luque, Alejandro, 46  
Luque, Bartolo, 75
- Manzano, Fernando, 91  
Marín-Rubio, Pedro, 65  
Marques, Francisco, 34  
Martínez González, Cristina, 73, 89  
Martínez Salamero, Luis, 23  
Martínez, Juan Antonio, 97  
Martínez, Clotilde, 58  
Masdemont, Josep J., 25  
Maza, Susanna, 76  
Mera, M. Eugenia, 78  
Michinel, Humberto, 23  
Miralles Canals, Juan José, 29  
Moncayo Hormigo, María, 98  
Moreno, Yamir, 70  
Morillas, Francisco, 65
- Nóvoa Fernández, David, 37  
Navarrete, Carlos, 36  
Navarro Lérida, María Cruz, 34  
Navarro, Arcadi, 22

Navarro, Emilio, 90  
Nuño, Juan Carlos, 29

Olivé, Carme, 31  
Olvera, Arturo, 65  
Orue, A. B., 85

Palacián, Jesús F., 53  
Pantazi, Chara, 48  
Pastor, G., 93  
Pastor, Gerardo, 77  
Perez-Arjona, Isabel, 44  
Peris, Alfred, 55, 87  
Pierantozzi, Teresa, 33  
Pla, Francisco, 80  
Poncela, Julia, 30  
Prytula, Vladyslav, 66

Ramírez I., Rafael, 48  
Ramírez, Rafael, 102  
Rey, José-Manuel, 67  
Rodado, Gema María, 92  
Rodas Verde, Maria, 44  
Rodenas, Francisco, 57  
Roldán, Eugenio, 69  
Romero Álvarez, Natalia, 61

Salas, José Pablo, 46  
Samà Camí, Anna, 30  
Santiago, Antonio, 72  
Sendiña Nadal, Irene, 94  
Seoane, Jesús M., 45, 95  
Sillero Quintana, Manuel, 56  
Silva, F., 91  
Soler López, Gabriel, 76  
Staliunas, Kestutis, 70  
Stich, Michael, 35  
Stirling , James R., 53

Trillo, Juan Carlos, 56

Used Villuendas, Javier, 73

Valero, José, 81  
Vallejo, Juan C., 60  
Vidal Cassanya, Gerard, 92

Wagemakers, Alexandre, 87

Zacarés, M., 100  
Zacarés, Mario, 99  
Zakynthinaki, Maria S., 42  
Zambrano, Samuel, 69  
Zanin, Massimiliano, 99, 101